

**Langage graphique à partir des mots temporels
pour le positionnement d'objets
dans une scène 3D.**

Mémoire de stage en vue de l'obtention du
Diplôme d'Etudes Approfondies
Théorie et Ingénierie des bases de données

présenté par Michel Dubois

Sous la direction du Professeur Sylviane Schwer.

Langage graphique à partir des mots temporels pour le
positionnement d'objets dans une scène 3D.

Michel Dubois, sous la direction du Professeur Sylviane Schwer

5 septembre 1999

Résumé

Représenter et raisonner sur des informations temporelles qualitatives, incomplètes et imprécises constitue une partie essentielle de nombreux travaux en l'intelligence artificielle. Les modèles de représentation de ces informations temporelles reposent soit sur le concept d'intervalle, soit sur celui de point. Raisonner dans l'algèbre d'intervalle d'Allen est un problème connu comme NP-difficile. C'est pourquoi la recherche de sous-classes traitables est si importante. La classe traitable la plus utilisée, dû au concept cognitif de voisinage, est la classe des 83 relations convexes, ensemble des relations de Allen traduisibles en conjonction d'inéquations linéaires sur l'ensemble de leurs extrémités (points). Nous proposons dans ce mémoire, une taxonomie de cette sous-classe fondée sur l'ensemble des ordres sur au plus 4 points préservant la notion d'intervalle. Nous en avons déduit un outil graphique d'aide à la spécification et à la résolution des contraintes temporelles qualitatives.

Mots Clef

Représentation et raisonnement temporel, algèbre de Allen, convexité, taxonomie.

Abstract

Representing and reasoning about incomplete and indefinite qualitative temporal information is an essential part of many artificial intelligence tasks. An interval-based framework and a point-based framework has been proposed for representing such temporal information. Reasoning tasks in Allen Interval Algebra are known to be NP-hard. That is why isolating tractable subclasses are so important. The most used tractable subclass, due to the cognitive perspective of neighborhood, is the convex subclass, which consists of the 83 Allen's relations, one can translate into a conjunction of linear inequalities over endpoints. We propose, in this paper, a taxonomy for the convex subclass based on orders over a set of at most four points supporting intervals semantics and derive a graphical tool for designing qualitative temporal constraints between intervals and computing all possible solutions in a graphical manner in linear time.

Keywords

Temporal representation and reasoning, Allen's algebra, convexity, taxonomy.

Table des matières

1	Introduction	6
1.1	Le problème	6
1.1.1	Représentation qualitative des objets	6
1.1.2	Déduction du positionnement qualitatif des objets	7
1.2	Restriction du sujet	9
1.3	Intérêts de notre approche	9
1.3.1	Bases de données	9
1.3.2	Autres domaines	10
1.4	Exemple	10
1.4.1	Enoncé	10
1.4.2	Première expression du problème	11
1.5	Plan du mémoire	11
2	Approches du temps	12
2.1	Les approches algébriques	13
2.1.1	L'algèbre des intervalles	13
2.1.2	L'algèbre des instants [22]	19
2.2	Les travaux sur la topologie	21
2.2.1	L'apport de Nökel [14]	21
2.2.2	Freksa [5]	22
2.2.3	Les travaux de Ligozat [11], [12] sur l'algèbre des intervalles	26
2.3	L'approche de Schwer [17]	28
2.3.1	Instants, chronologies, simultanéité	28
2.3.2	Approche basée sur un langage rationnel	29

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
2.3.3 Un unique opérateur rationnel	30
3 Classification topologique des relations convexes	32
3.1 Détermination des 15 spectres	33
3.1.1 Spectres de taille 2	33
3.1.2 Spectres de taille 3	33
3.1.3 Spectres de taille 4	34
3.2 Patrons	34
3.3 Classification des ensembles convexes	37
3.4 Traduction de cette classification dans d'autres formalismes	37
4 Les patrons étiquetés	43
4.1 Etude détaillée de l'exemple	43
4.1.1 Enoncé (Rappel)	43
4.1.2 Spécification	44
4.1.3 Calcul du problème	44
4.1.4 Réponse	46
4.2 Propriétés des patrons étiquetés	47
4.2.1 Patron étiqueté et mots temporels	47
4.2.2 Equivalent ponctuel d'un patron étiqueté	47
4.2.3 Patron étiqueté et graphe de dépendance	47
4.3 Opérations sur les patrons étiquetés	49
4.3.1 Notion de domaine d'un E-patron	49
4.3.2 Opérations unaires	50
4.3.3 Opérations binaires	52
4.4 Sortir des relations convexes	56
5 Conclusion	60

Table des figures

1.1	Les objets sont emballés dans des boîtes isothétiques	7
1.2	Les projections donnent des intervalles.	8
2.1	Spécification du problème dans un graphe de Allen	16
2.2	Le calcul du problème dans un graphe de Allen.	18
2.3	Le graphe de la spécification du problème à l'aide de l'algèbre des points.	20
2.4	La matrice du problème exprimée en algèbre des instants	21
2.5	Le treillis des 13 relations de Allen avec la notion de A-voisinage.	22
2.6	La représentation iconique de Freksa de $\langle m, o, o_i, m_i \rangle$	23
2.7	Spécification du problème à l'aide des relations de Freksa.	25
2.8	La structure en treillis distributif mise en évidence par G. Ligozat.	27
2.9	Une chronique dans le formalisme de Schwer	28
3.1	Le treillis des 13 relations de Allen (formalisme de Schwer)	33
4.1	Graphe d'incompatibilité de Allen	57
5.1	L'outil graphique d'aide à la spécification de contraintes temporelles qualitatives.	61

Liste des tableaux

2.1	Les 13 relations exhibées par Allen	13
2.2	La table de composition de Allen	15
2.4	Table de composition - Tables de Vilain et Kautz	19
2.5	Table d'intersection - Tables de Vilain et Kautz	19
2.6	Les relations de Freksa.	24
2.7	Les 13 relations de base exprimées en mots temporels	29
3.1	Les patrons	35
3.2	Les patrons (suite)	36
3.3	La classification des ensembles convexes (formalisme de Schwer)	38
3.4	La classification des ensembles convexes (formalisme de Allen)	39
3.5	La classification des ensembles convexes (formalisme de freksa)	40
3.7	La classification des ensembles convexes (formalisme de freksa) - suite	41
3.9	Classification topologique de \mathcal{C}_A	42
4.1	Ensembles convexes et équivalents ponctuels	48

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le problème

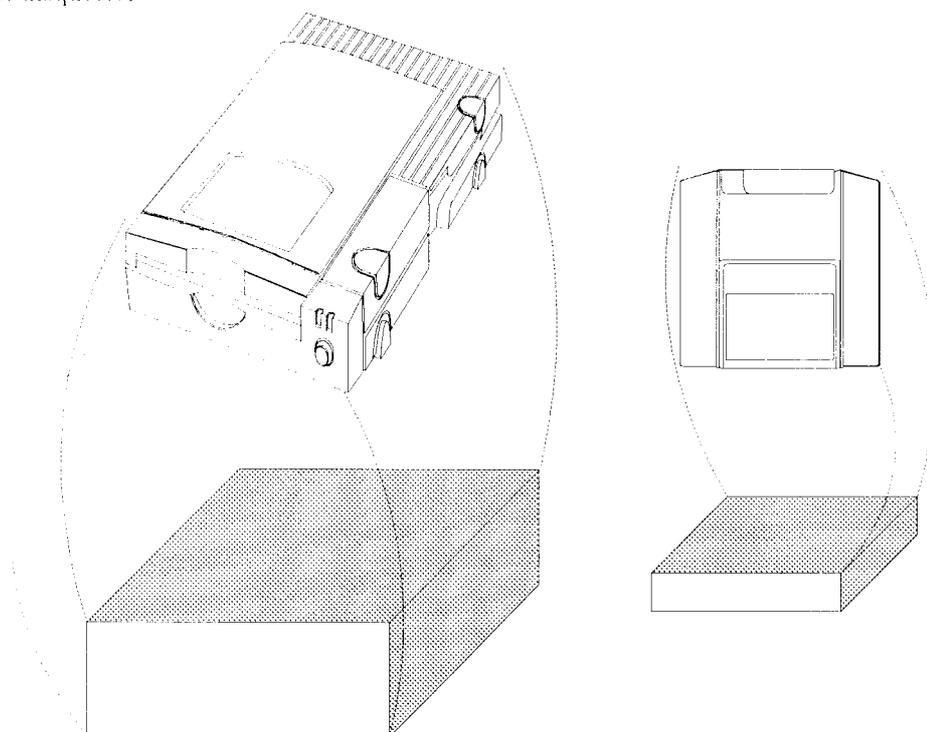
Le stage de DEA se fait dans le cadre du projet SOML (langage d'aide à la conception déclarative de scènes 3D - Scene Objects Modeling Language [15]). Il offrira la possibilité d'une inférence aisée sur la configuration spatiale de la scène. Résoudre une contrainte spatiale ou locative, c'est tout d'abord placer des objets dans l'espace, par rapport à un repère absolu ou relatif. SOML est un modèle hybride (quantitatif-qualitatif) de positionnement déclaratif d'objets 3D. Il est destiné à être le support d'une méthode de résolution de configurations spatiales en conception déclarative de scènes. Son objectif est la représentation et la déduction du positionnement d'un ensemble d'objets fondées sur les localisations décrites en termes de concepts spatiaux. En ce qui concerne mon stage, seule la partie qualitative du modèle est pertinente.

1.1.1 Représentation qualitative des objets

Pour la localisation d'un objet, la notion classique de boîte englobante est utilisée en tant que méta objet. En effet, les objets étant empaquetés dans des boîtes isothétiques (figure 1.1), les projections de leurs dimensions sur les axes de coordonnées, qui sont des intervalles, suffisent à déterminer leur positions dans l'espace. Les relations qualitatives spatiales qui lient ces intervalles sont des relations d'Allen [2] exhibées à l'origine pour des intervalles temporels (figure 1.2).

FIG. 1.1 – Les objets sont emballés dans des boîtes isothétiques

Soit A le lecteur,
Soit B la disquette.



1.1.2 Déduction du positionnement qualitatif des objets

La mise en oeuvre du raisonnement doit permettre de détecter les situations contradictoires, d'améliorer l'information de position respective des entités notamment quand les informations viennent de sources différentes. Le raisonnement sur le positionnement en termes d'intervalles est assimilé à un problème de satisfaction de contraintes. Les contraintes sont définies sur chaque axe de coordonnées en terme de relations d'Allen. Une contrainte 3D entre deux objets est la conjonction de trois contraintes 1D, une pour chaque axe. Une contrainte 1D est définie entre deux segments d'un même axe. Une contrainte 3D ne sera vérifiée que si chacune de ses trois contraintes 1D est vérifiée.

Lors d'une reconnaissance des relations locatives deux cas problématiques sont possibles : la description peut être incomplète ou invalide. Dans le premier cas, il s'agit d'inférer une relation non explicite à la base de deux autres connues au sein d'un cadre de référence, en explorant la propriété de composition des relations spatiales. Dans un second cas, il s'agit de faire un test de cohérence de la description spatiale, où un résultat de composition nulle est le signe d'une inconsistance.

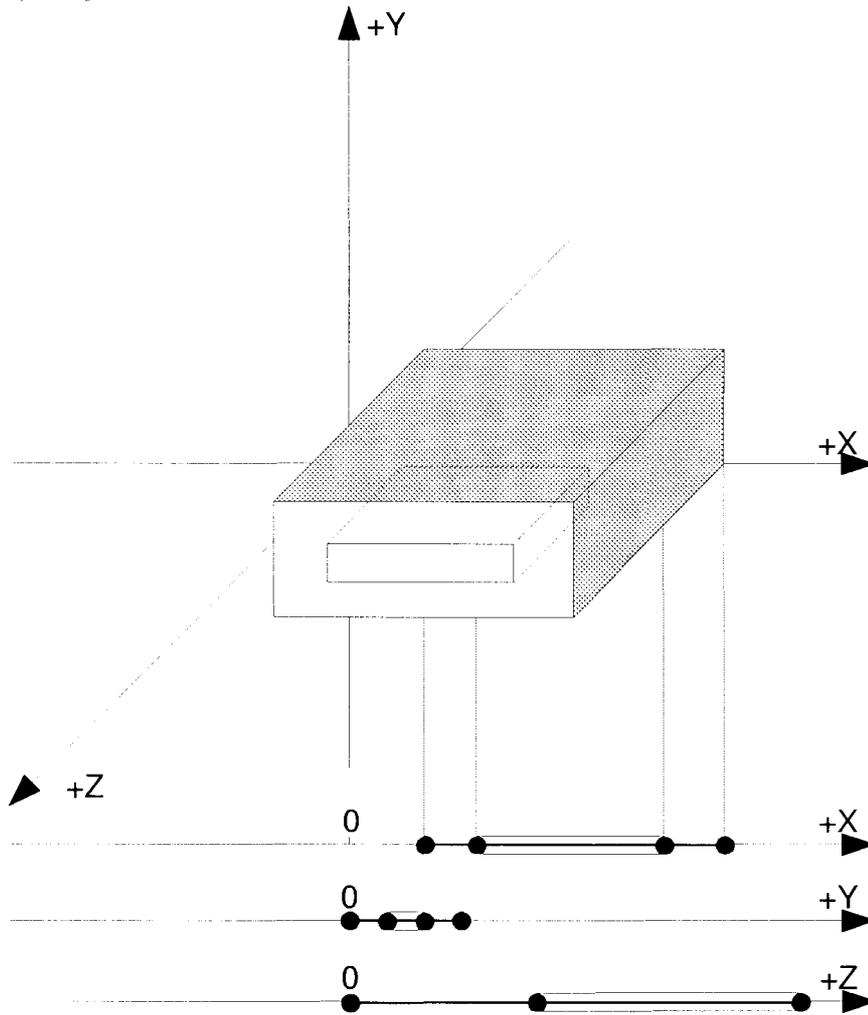
FIG. 1.2 – *Les projections donnent des intervalles.*

“la disquette est utilisée dans le lecteur “ peut se traduire :

$$a_x \wedge d_x \wedge b_x \wedge a_y \wedge d_y \wedge b_y \wedge a_z \wedge d_z \wedge b_z$$

“la disquette est dans le lecteur mais éjectée “ peut se traduire :

$$a_x \wedge d_x \wedge b_x \wedge a_y \wedge d_y \wedge b_y \wedge a_z \wedge o \wedge b_z$$



Pour qu'une description qualitative de scène soit réalisable, il est nécessaire qu'il existe au moins une relation d'Allen vérifiable par couple d'objet. Afin de résoudre le problème des distances nécessaires mais manquantes dans la description initiale des contraintes, la solution consistante qualitative en termes d'intervalles sur les trois axes se traduit sous forme de relations d'extrémités. Les graphes des relations sur les extrémités permettent d'évaluer les distances entre les extrémités des intervalles des boîtes englobantes et de les convertir dans un système d'inéquations linéaires.

1.2 Restriction du sujet

Il s'agit de proposer un langage graphique exprimant des contraintes, sur des intervalles, qualitatives (sans mesure, ni estampillage), incomplètes, floues et pouvant évoluer.

Langage graphique, car il est visuel et fait apparaître la sémantique directement à l'utilisateur. Il doit exprimer le maximum d'information sans pour autant que le graphique apparaisse surchargé aux yeux de l'utilisateur.

Contraintes temporelles qualitatives, incomplètes pour faire du raisonnement: déduire de nouveaux faits, préciser des informations qui à l'origine étaient incomplètes.

Il doit permettre l'évolution du système sans entraîner de changements profonds: une évolution à la marge du système ne doit pas provoquer un changement radical de la base de connaissance.

Ces préoccupations sont celles de l'article de Allen[2]. Il est donc naturel de partir de son approche.

1.3 Intérêts de notre approche

L'intérêt d'un tel langage graphique est multiple. Nous allons voir d'abord les intérêts particulièrement liés aux bases de données. Puis nous évoquerons d'autres domaines.

1.3.1 Bases de données

Bases de données temporelles: Il peut être intéressant de stocker de l'information relative à l'occurrence d'événements. Une information qualitative entre intervalles évite de nombreuses mises à jour car les estampilles sont symboliques et non plus numériques. La numérisation se fait ultérieurement. Par contre, l'interrogation de la base exige des requêtes adaptées. Il faut implanter un calcul de Allen et un système de raisonnement par inférence. Ceci est considéré dans les bases de données temporelles telles que IXRM [19] et TEMPORA [20]. Un langage graphique

peut être un module au-dessus de la base pour permettre à la fois la mise à jour de la base mais aussi l'interrogation de cette base. Le module traduit les ordres des utilisateurs en requêtes. Ces approches doivent être améliorées car elles souffrent d'un problème de lenteur. De plus la satisfaction de contraintes temporelles peut être étudiée à l'aide de la logique. Des recherches sont en cours pour étendre DATALOG afin de résoudre de tels problèmes. Elles se font dans le cadre des bases de données déductives.

Bases de données géographiques : Il s'agit de stocker le positionnement qualitatif d'objets qui peuvent évoluer dans le temps. Les R-Tree permettent de stocker des objets géographiques emballés dans des rectangles englobants. Un des problèmes de stockage est la dégradation de l'indexation au fur et à mesure des évolutions.

1.3.2 Autres domaines

Planification: La résolution de contraintes temporelles est au coeur des problèmes de planification.

Positionnement d'objets 3D : CAO, imagerie 3D, jeux d'échecs.

1.4 Exemple

Notre mémoire expose plusieurs approches basées sur les intervalles temporelles. Un exemple ni trop simple, ni trop compliqué peut être un bon moyen d'appréhender ces différentes approches. De plus, s'il est commun à ces approches, il facilitera la comparaison de ces dernières.

Nous nous inspirons de l'exemple de Revault [16] concernant un ensemble d'informations temporelles sur les arrêts de trains dans une gare.

1.4.1 Énoncé

On considère un ensemble de six trains A, B, C, D, E et F dont les contraintes temporelles sont les suivantes :

1. les trains A, B et E arrivent à quai en même temps, mais A repart avant B,
2. A part après ou en même temps que C, mais avant l'arrivée de D,
3. D et F arrivent à l'instant où B part,
4. E et D repartent en même temps.

1.4.2 Première expression du problème

Si on perçoit l'arrêt de chaque train comme un intervalle, noté par la lettre minuscule qui correspond, on peut exprimer cette connaissance par des relations entre les intervalles a , b , c , d , e et f , qui sont les suivantes :

- a est au début de b,
- a se termine après ou en même temps que c,
- a est complètement avant d,
- b et e commencent en même temps,
- b jouxte inférieurement d et f,
- e et d se terminent en même temps.

1.5 Plan du mémoire

L'approche de Allen est le point de départ naturel de notre recherche. Cependant elle ne permet pas d'exprimer les relations imprécises ou incomplètes de manière satisfaisante d'un point de vue de l'utilisateur. De plus, même si le problème de la calculabilité a été une préoccupation originelle de Allen, il existe des améliorations qu'il faudra prendre en compte. Ceci fait l'objet du chapitre deux.

Le chapitre suivant est consacré à la classification topologique des ensembles convexes de Allen.

Elle permet exprimer de manière intuitive les relations imprécises ou incomplètes entre deux intervalles;

Elle a de bonnes propriétés au niveau de la calculabilité;

Elle s'exprime à l'aide d'inéquations linéaires.

Le chapitre quatre traite du cas général : plusieurs intervalles sont exprimés dans un patron étiqueté qui n'est plus restreint à seulement deux intervalles.

Chapitre 2

Approches du temps

Ce chapitre est un panorama des travaux qui ont servi de socle à notre réflexion. Notons que le raisonnement sur un univers évolutif exige souvent, plutôt qu'une modélisation explicite du temps, la modélisation des relations temporelles pouvant exister entre les objets spécifiques aux domaines considérés [8]. C'est par exemple le cas en planification, en contrôle ou en recherche ou suivi de scénarii. Un processus d'abstraction permet de réduire ces objets à leur trace temporelle, c'est-à-dire leur durée de vie ou d'occurrence. Les modèles utilisés sont généralement des points [22] des intervalles [1], [2], des chaînes d'intervalles [9] et [10], des intervalles généralisés [11] ou des mélanges comme des points et des intervalles [21] définis sur un ensemble totalement ordonné et dense comme R ou Q . C'est l'approche de Allen [2], travaillant sur les intervalles qui a donné lieu au plus grand nombre de travaux scientifiques. Du reste c'est cette approche qui est utilisée dans SOML. Aussi ce panorama ne concernera-t-il que les travaux sur les intervalles vrais parfois appelés intervalles convexes. Ceci ne nous interdira pas d'évoquer les parties pertinentes des travaux de [14] et de [17], traitant des intervalles généralisés.

Ce chapitre traitera dans un premier temps des approches algébriques. Puis l'étude de la topologie permettra de dégager certaines sous-classes de l'algèbre des points car ces dernières ont des propriétés algorithmiques intéressantes. Enfin, l'approche de Schwer [17], base de notre recherche sur une représentation graphique sera étudiée dans la dernière section.

TAB. 2.1 - Les 13 relations exhibées par Allen

Relations		Graphiques	Notations
précède	before		$a < b$
rencontre	meets		$a m b$
chevauche	overlaps		$a o b$
début	starts		$a s b$
pendant	during		$a d b$
termine	finishes		$a f b$
égale	equal		$a = b$
est-terminé-par	finished-by		$a f_i b$
contient	contains		$a d_i b$
est-débuté-par	started-by		$a s_i b$
est-chevauché-par	overlapped-by		$a o_i b$
est-rencontré-par	met-by		$a m_i b$
est-précédé-par	after		$a > b$
Intervalle A			intervalle A
Intervalle B			intervalle B

2.1 Les approches algébriques

2.1.1 L'algèbre des intervalles

Les relations de base

Allen est le premier à avoir exhibé les 13 relations qualitatives possibles entre deux intervalles et à fournir une algèbre pour le raisonnement sur les couples d'intervalles. Ces 13 relations élémentaires et mutuellement exclusives que l'on peut trouver entre deux intervalles indépendamment des coordonnées exactes des débuts et fins des intervalles, sont qualitatives et topologiques (représentées dans le tableau 2.1). Cette algèbre est stable par inversion. Les relations inverses forment une symétrie par rapport à la relation $a = b$.

Une algèbre relationnelle

Une partie non vide de l'ensemble de ces 13 relations atomiques représente les relations possibles entre deux intervalles. Si cette partie est réduite à un singleton, l'information est complète, sinon elle est incomplète : une seule de ces relations sera à un instant donné réalisée. Cette approche représente l'information incomplète par des disjonctions de relations atomiques possibles. A partir de l'ensemble des 13 relations atomiques, on peut construire 2^{13} parties possibles. La partie vide représente l'absence de relation entre 2 intervalles. L'algèbre d'Allen munie des opérations d'inversion, d'intersection et de composition hérite de la structure d'une algèbre booléenne munie

des opérateurs qui lui permettent d'être une algèbre relationnelle au sens de Tarski [18].

Dès que l'on est en présence de trois intervalles ou plus, il faut utiliser les tables de transitivité de Allen. Une table de transitivité (tableau 2.2) permet de déterminer la composition de deux relations. En effet la connaissance de relations liant X et Y, de relations liant Y et Z, peut permettre de déduire des relations possibles entre X et Z. Pour mener un tel raisonnement, il faut des pas d'inférence. Les opérateurs de composition et d'intersection permettent de les définir.

Des graphes pour étudier un problème

L'usage de graphes pour le calcul des solutions d'un problème de contraintes temporelles est classique. Allen [2] utilise des graphes dont les sommets sont les intervalles et les arcs, les relations possibles, ou autorisées entre les intervalles étiquetant les noeuds extrémités. Toute insertion d'un nouveau fait, c'est à dire toute expression d'une relation temporelle entre deux intervalles, implique le calcul des relations entre ces intervalles et de chacun des noeuds du graphe existant. L'algorithme ne détecte pas les inconsistances dans le cas général.

Spécification du problème à l'aide d'un graphe:

Si nous reprenons l'exemple donné dans le chapitre d'introduction, sa traduction en graphe est la suivante :

a est au début de b, soit $a \text{ s } b$,

a se termine après ou en même temps que c, soit $a (f, =, f_i, d_i, s_i, o_i, m_i, >) c$,

a est complètement avant d, soit $a < d$,

b jouxte inférieurement d et f, soit $b \text{ m } d$ et $b \text{ m } f$,

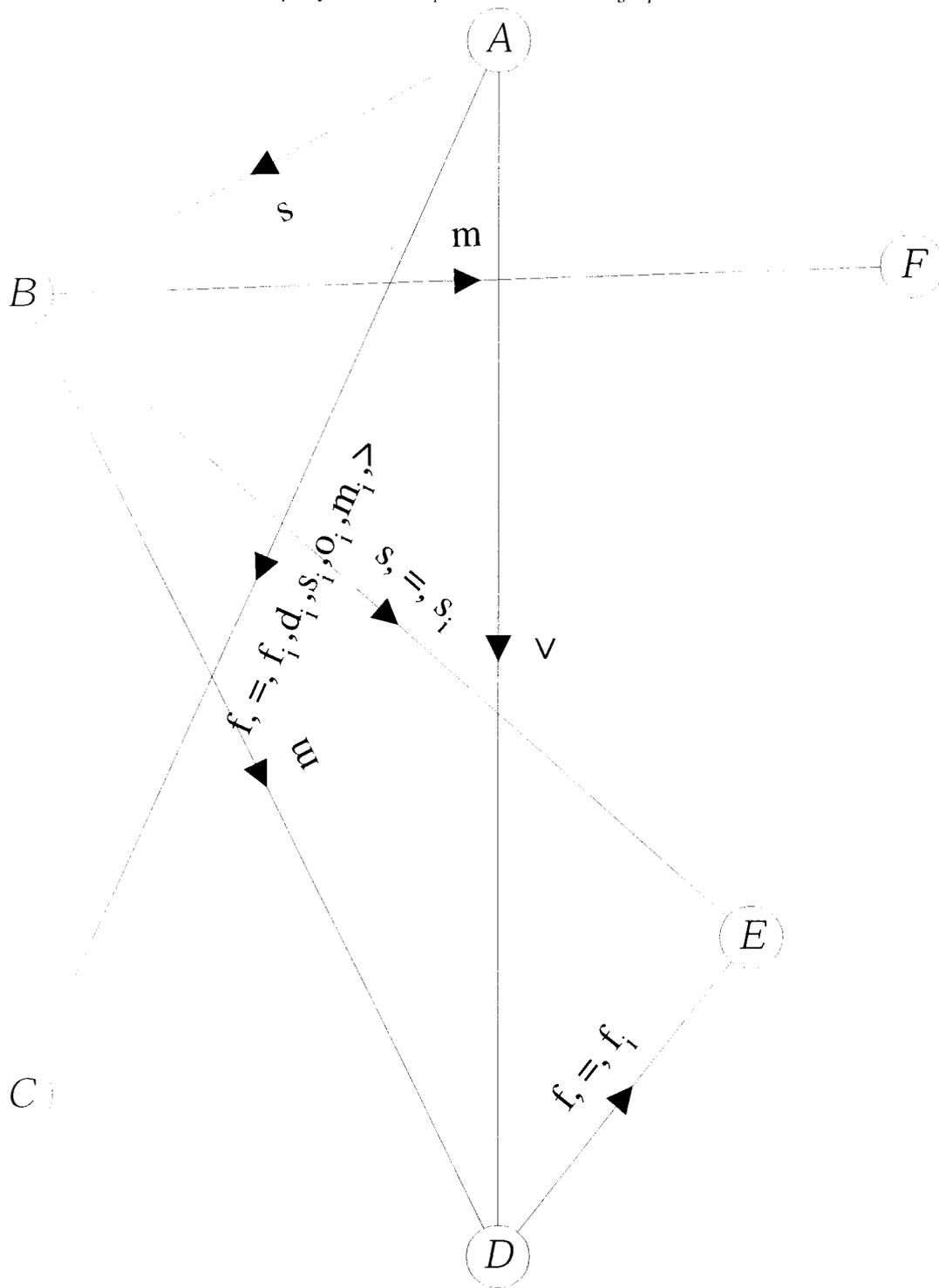
b et c commencent en même temps, soit $b (s, =, s_i) c$,

e et d se terminent en même temps, soit $e (f, =, f_i) d$.

La spécification du problème de l'introduction est faite à la figure 2.1. On se contente de reporter le raisonnement sur le graphe. Si l'arc (i,j) est représenté, alors il n'est pas nécessaire de représenter l'arc (j,i) qui a pour étiquette la transposée de celle de l'arc (i,j). A ce stade du problème, on peut compléter le graphe: ajouter des arcs étiquetés avec la relation universelle pour que tous les sommets soient reliés directement. Cependant, par convention, dans la mesure où ces arcs ne traduisent aucune connaissance particulière i.e. aucune contrainte, ils ne sont pas représentés afin d'alléger le graphe.

Calcul du problème par propagation de contraintes à travers un réseau de relation :

FIG. 2.1 – Spécification du problème dans un graphe de Allen



Etant donné un ensemble d'intervalles, la donnée d'informations sur les liens possibles entre certains d'entre eux permettra en général de déduire des liens (implicitement contenus dans les hypothèses) qui n'apparaissent pas en tant que tels. La découverte de ces nouveaux liens est appelée la propagation de contraintes initiales. Ainsi, connaissant les contraintes entre un premier et un deuxième intervalle et les contraintes entre ce dernier et un troisième, propager celles-ci, c'est en déduire les relations qui restent possibles entre le premier et le troisième.

Par exemple :

si $a \leq b$ et $b(s_i, =, s_i) \leq e$ alors $a \leq b \leq s_i \leq e \Rightarrow a \leq s_i$; $a \leq b = e \Rightarrow a \leq s_i$; $a \leq b \leq s_i \leq c \Rightarrow a(s_i, =, s_i) \leq c$.

Donc $a(s_i, =, s_i) \leq e$.

si $a \leq b$ et $b \leq m \leq d$ alors $a < d$ (cohérent avec la spécification entre A et D),

de même entre A et F : si $a \leq b$ et $b \leq m \leq f$ alors $a < f$.

Ces exemples ont permis d'établir les contraintes entre l'intervalle A et tous les autres. Un algorithme en $O(n^3)$ de consistance de chemin a été proposé par Allen [2]. Mais il est incomplet.

Le calcul du problème de l'introduction se trouve à la figure 2.2. Elle montre les relations possibles entre toutes les paires d'intervalles. Le réseau présenté est minimal. Pour chaque arc, l'étiquette représente :

1. toutes les relations possibles;
2. seulement les relations possibles.

A partir de ce graphe, on peut déterminer un scénario cohérent ou l'ensemble des solutions possibles. Un scénario possible consiste à ne retenir qu'une relation contenue dans la disjonction minimale d'un arc. Puis à propager ce fait aux autres arcs. On considère l'arc comme traité, et on passe à un autre arc. A la fin les étiquettes ne contiennent plus de disjonction.

Voici un scénario possible : $a \leq b$; $a > c$; $a < d$; $a \leq e$; $a < f$; $b > c$; $b \leq m \leq d$; $b \leq s_i \leq e$; $b \leq m \leq f$; $c < d$; $c = e$; $c < f$; $d \leq f \leq e$; $d = f$; $e \leq f$; f . Comme tous les intervalles sont complètement positionnés les uns par rapport aux autres, on peut déduire la chronologie suivante:

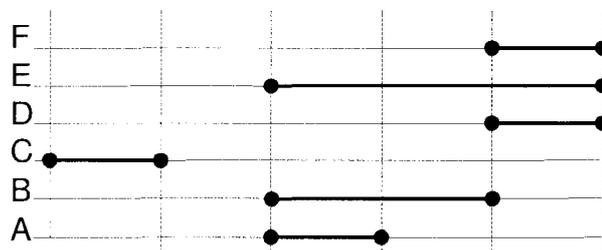
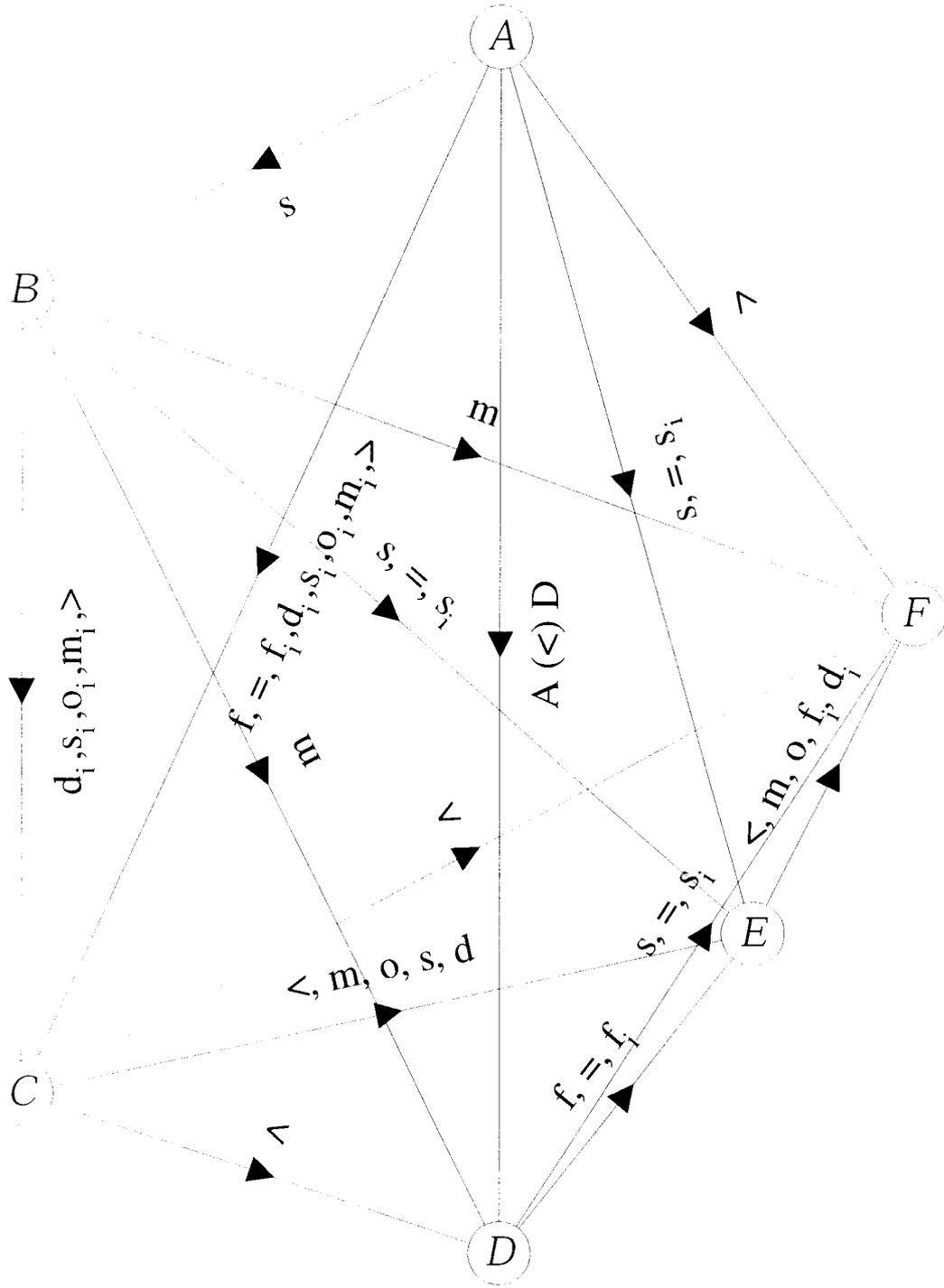


FIG. 2.2 – Le calcul du problème dans un graphe de Allen.



TAB. 2.4 Table de composition - Tables de Vilain et Kautz

*	<	≤	=	≠	≥	>	?
<	<	<	<	?	?	?	?
≤	<	≤	≤	?	?	?	?
=	<	≤	=	≠	≥	>	?
≠	?	?	≠	?	?	?	?
≥	?	?	≥	?	≥	>	?
>	?	?	>	?	>	>	?
?	?	?	?	?	?	?	?

TAB. 2.5 - Table d'intersection - Tables de Vilain et Kautz

+	<	≤	=	≠	≥	>	?
<	<	<	∅	<	∅	∅	<
≤	<	≤	=	<	=	∅	≤
=	∅	=	=	∅	=	∅	=
≠	<	<	∅	≠	>	>	≠
≥	∅	=	=	>	≥	>	≥
>	∅	∅	∅	>	>	>	>
?	<	≤	=	≠	≥	>	?

2.1.2 L'algèbre des instants [22]

Un instant n'a pas de durée (il est instantané) et correspond à un point. Il y a 3 relations de base entre deux points: $<$, $=$, $>$. L'information incomplète est exprimée à l'aide de disjonctions. Il y a 8 relations possibles entre deux points: $<$, $=$, $>$, $≤$, $≥$, $?$, $∅$.

$≤$ correspond à la disjonction ($<$, $=$), $≥$ à ($>$, $=$), $≠$ à ($<$, $>$), $?$ à ($<$, $=$, $>$).

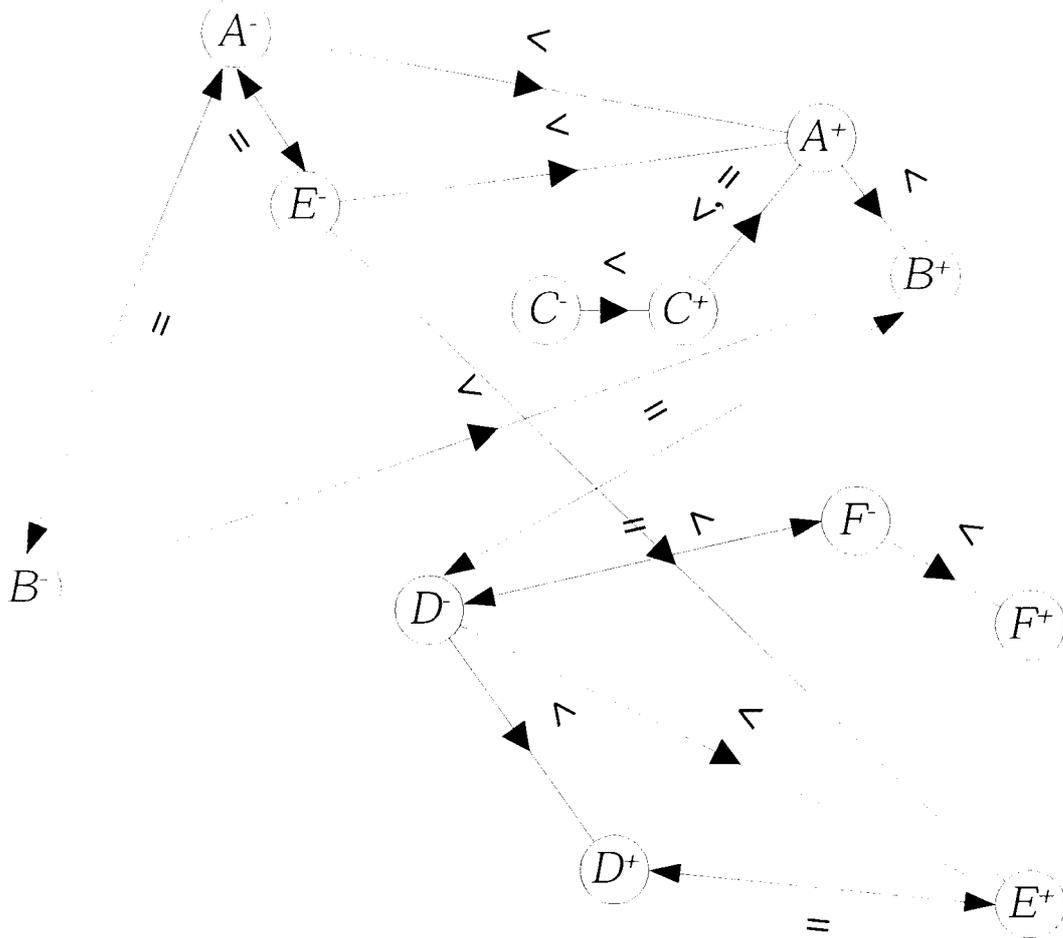
Cette algèbre dispose des opérateurs de transposition, d'intersection et de composition. L'intersection permet de regrouper des informations émanant de sources différentes mais concernant deux même points. La table d'intersection est fournie dans le tableau 2.5. La composition joue le même rôle que pour l'algèbre d'intervalles. Elle se trouve dans le tableau 2.4.

La traduction entre l'algèbre des instants et celle des intervalles

Vilain & Kautz [22] ont montré que seule une sous-classe de l'algèbre des intervalles était traduisible dans l'algèbre de points sans perte d'information. C'est la classe des pointisables, notée \mathcal{P} . Elle constitue l'algèbre d'intervalle restreinte, strictement équivalente à l'algèbre d'instant. On ne dispose pas d'une caractérisation, simple à tester, du sous-ensemble de relations entre intervalles qui appartiennent à l'algèbre restreinte. On peut en construire par contre la liste exhaustive des 187 éléments.

La traduction doit utiliser $\{<, =, ≤, ?, ≥, >, ≠\}$ et doit être des conjonctions de relations entre

FIG. 2.3 – Le graphe de la spécification du problème à l'aide de l'algèbre des points.



les extrémités d'intervalles. Par exemple, un intervalle A correspond à $a^- < a^+$. Pour les relations de l'algèbre d'intervalles qui n'appartiennent pas à \mathcal{P} , des approximations sont toujours possibles. Généralement, les relations intraduisibles sans disjonction sont celles qui contiennent des relations de base qui ne sont pas voisines.

Notre problème est traduisible dans l'algèbre des instants. La figure 2.3 représente sa spécification dans un réseau de points. Le calcul du problème se trouve dans la figure 2.4, sous forme de matrice.

Une algèbre intéressante du point de vue de la complexité

Les problèmes de satisfiabilité et d'étiquetage minimum d'un réseau d'intervalles sont NP-complets [22]. Allen [2] a fourni un algorithme en $O(n^3)$ de consistance de chemin non complet. En revanche, dans la sous-classe des pointisables, il existe un algorithme en $O(n^2)$ non fondé sur la consistance de chemin et qui vérifie la satisfiabilité du réseau. Si on passe à une sous-classe des

FIG. 2.4 - La matrice du problème exprimée en algèbre des instants

	A-	A+	B-	B+	C-	C+	D-	D+	E-	E+	F-	F+
A-		<	=	<			<	<	=	<	<	<
A+	>		>	<	>	≥	<	<	>	<	<	<
B-	=	<		<			<	<	=	<	<	<
B+	>	>	>		>	>	=	<	>	<	=	<
C-		<		<		<	<	<		<	<	<
C+		≤		<	>		<	<		<	<	<
D-	>	>	>	=	>	>		<	>	<	=	<
D+	>	>	>	>	>	>	>		>	=	>	
E-	=	<	=	<			<	<		<	<	<
E+	>	>	>	>	>	>	>	>	=	>		>
F-	>	>	>	=	>	>	=	<	>	<		<
F+	>	>	>	>	>	>	>		>		>	

pointisables, celles des relations convexes, on peut avoir l'éventuelle coïncidence entre la consistance de chemin dans le réseau et la consistance globale du réseau.

2.2 Les travaux sur la topologie

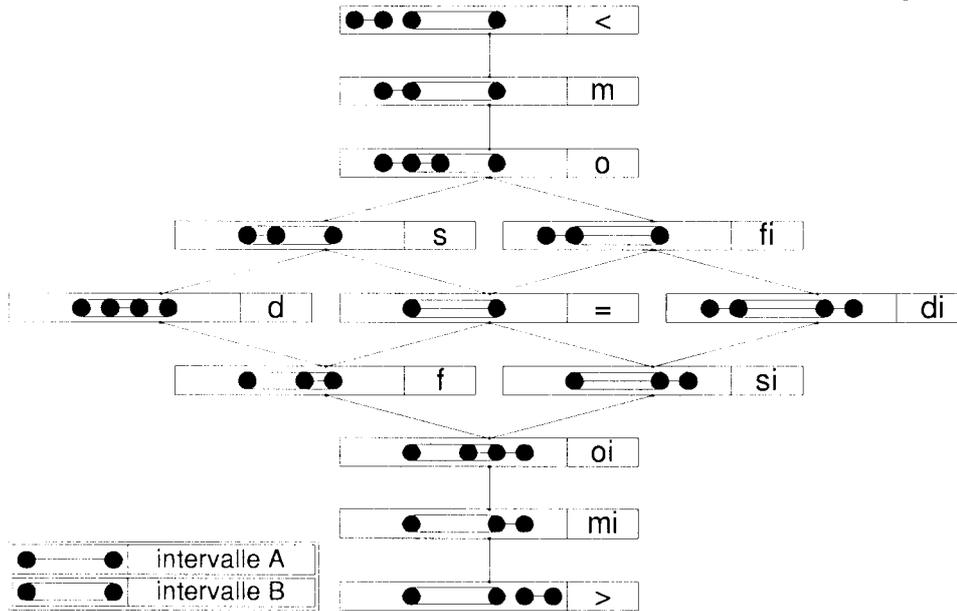
2.2.1 L'apport de Nökel [14]

Nökel propose une représentation avec une notion intuitive de voisinage : pour une relation de base, si on fixe trois des extrémités et on fait évoluer la dernière, on obtient sa relation voisine. On peut voir la figure 2.5 comme une description mettant en évidence les transitions continues entre les relations en utilisant un principe d'économie maximale sur le déplacement des bornes des intervalles mis en relation. Elle fait apparaître une certaine proximité naturelle entre les relations adjacentes.

Nökel trouve 82 relations convexes propres. Elles ne correspondent ni à la fermeture transitive de la composition des relations de base, ni aux pointisables.

Les relations convexes peuvent s'exprimer dans l'algèbre des instants à l'aide des relations appartenant à $\{\emptyset, <, =, \leq, ?, \geq, >\}$. On notera l'absence de \neq .

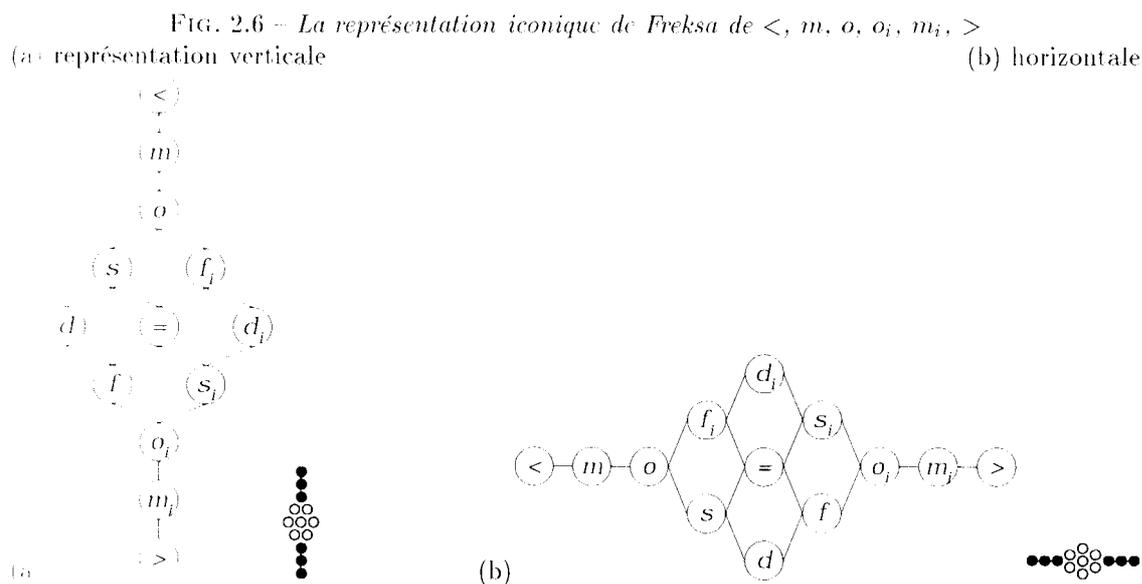
FIG. 2.5 – Le treillis des 13 relations de Allen avec la notion de A-voisinage.



2.2.2 Freksa [5]

Les voisinages

Chaque relation de base correspond à une situation précise, une connaissance parfaite des positions relatives de deux intervalles. Contrairement au monde réel, les connaissances sont souvent imprécises, donc leur expression ne se fait pas simplement en utilisant les relations de base : la moindre imprécision engendre des disjonctions. Or, \mathcal{A}_{13} n'étant pas stable pour la composition (tableau 2.2), même en partant de connaissance précise, la composition donne des connaissances imprécises. Freksa constate que l'imprécision n'est pas en général anarchique. Elle correspond plutôt à un nuage de relations proches d'un élément de \mathcal{A}_{13} . De plus de faibles variations des relations entrées dans la table de composition produisent de faibles variations des résultats de la composition. Ceci conduit à la notion de voisinage. Il en trouve trois : le A-voisinage (conservation de 3 extrémités), le B-Voisinage (conservation de l'amplitude), le C-voisinage (conservation de leur centre de gravité). Il associe à chaque type de voisinage, un graphe des transitions permises par ce type. Par exemple le graphe de A-voisinage correspond à la figure 2.5. Une relation imprécise constitue un voisinage d'un certain type si elle constitue un chemin dans le graphe de ce type. Sur les 8192 relations possibles, Freksa recense 808 A-voisinages (dont 82 sont convexes), 769 B-voisinages, 529 C-voisinages donc 1255 voisinages. Ainsi les A-voisinages convexes correspondent aux relations convexes de [11] et de [14]. Il précise que le choix d'un type de voisinage se fait



en accord avec le type d'incertitude prévisible dans le contexte de connaissances à manipuler. Il constate également que les 29 relations imprécises obtenues dans la table de composition sont des Λ -voisinages qui forment un ensemble stable pour la composition. Cet ensemble sera noté \mathcal{C}_A .

La représentation de la connaissance incomplète

Freksa propose 2 types de représentation. Lorsque l'on peut attacher à une disjonction une expression linguistique simple, autant lui donner un nom et une abréviation. Comme ceci, le raisonnement en est facilité. Ainsi il propose 18 nouvelles relations qui, contrairement aux relations de base, sont floues. Le tableau 2.6 recense ces relations. Il constate également que les relations appartenant à la fermeture de \mathcal{A}_{13} pour la composition peuvent s'exprimer simplement.

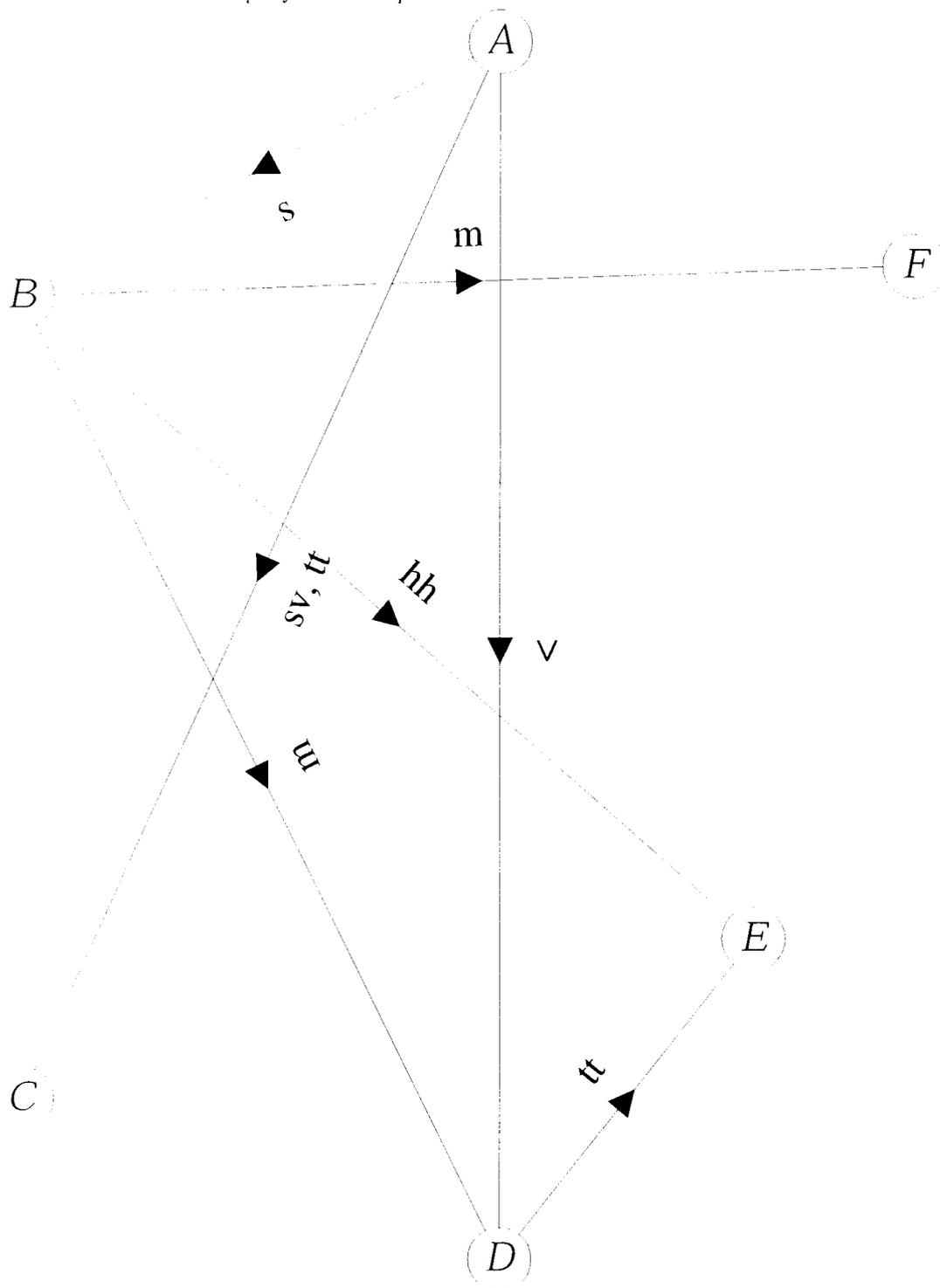
Lorsqu'il n'est pas possible d'exprimer simplement une relation, il existe toujours la possibilité de l'exprimer graphiquement, à l'aide d'une icône. Le raisonnement à base d'icône est plus simple que l'énumération exhaustive des relations de base constitutives de la disjonction. L'icône représente le treillis distributif. Les points représentent les relations de base. Un point noir correspond à la présence de cette relation dans la disjonction tandis qu'un point vide correspond à son absence. La figure 2.6 explique son interprétation. Dans l'article [5], seule la représentation verticale est proposée. La représentation horizontale permet de gagner de la place dans les tableaux de ce mémoire. Une icône est la synthèse visuelle de la relation imprécise.

TAB. 2.6 - Les relations de Freksa.

Les 29 premières (sans la partie vide) forment un ensemble stable pour la composition

Description de la relation	Notation	Icone	Icone	Notation	Description de la relation
La partie vide					
Relation de base					
equal	=				
starts	s			s_i	started-by
finishes	f			f_i	finished-by
meets	m			m_i	met-by
before	<			>	after
overlaps	o			o_i	overlapped-by
during	d			d_i	contains
Relation floue					
head to head with	hh				
tail to tail with	tt				
universal	?				
born before death of	bd			db	died after birth of
older	ol			yo	younger
survived by	sb			sv	survives
older and survived by	ob			ys	younger and survives
contemporary of	ct				
older contemporary of	oc			yc	younger contemporary of
survived by contemporary of	bc			sc	surviving contemporary of
precedes	pr			sd	succeeds

FIG. 2.7 -- Spécification du problème à l'aide des relations de Freksa.



Etude de l'exemple

Si nous reprenons l'exemple donné dans le chapitre d'introduction, l'utilisation des relations de Freksa (tableau 2.6) permet d'obtenir graphe de la figure 2.7:

- a est au début de b, soit $a s b$,
- a se termine après ou en même temps que c, soit $a (sv, tt) c$,
- a est complètement avant d, soit $a < d$,
- b juxte inférieurement d et f, soit $b m d$ et $b m f$,
- b et e commencent en même temps, soit $b (hh) e$,
- e et d se terminent en même temps, soit $e (tt) d$.

On remarque qu'il n'y a plus qu'une disjonction apparente. L'utilisation des relations floues de Freksa permet bien souvent d'éviter de telles disjonctions. Ici, nous touchons à la limite du pouvoir d'expression de l'ensemble stable par composition des 29 relations. Pour exprimer un lien \leq ou \geq entre deux extrémités, nous avons recours à une disjonction

2.2.3 Les travaux de Ligozat [11], [12] sur l'algèbre des intervalles

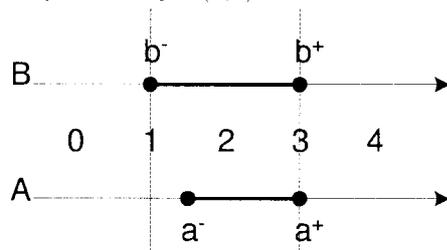
Ligozat [11] a rendu explicite l'algébrisation des intervalles. Il a introduit la représentation canonique des relations de base comme des couples d'entiers de 0 à 4. Si a et b sont en relation par R , le principe consiste à séparer l'espace linéaire en 5 zones par rapport aux bornes de b : 0 (ce qui précède b^-), 1 pour b^- , 2 entre b^- et b^+ , 3 pour b^+ et 4 au-delà de b^+ . Le couple à une relation décrit dans l'ordre les zones d'appartenance de a^- et de a^+ .

La figure 2.8(a) montre comment a été obtenu le couple (2,3) pour décrire la relation f . On détermine les 13 couples que l'on positionne sur un plan. On obtient un treillis distributif avec $(0,0) \equiv <$ comme élément inférieur et $(4,4) \equiv >$ comme élément supérieur. La précédence dans ce treillis est définie comme ceci : une relation $(r_1, r_2) < (s_1, s_2) \Leftrightarrow r_1 < s_1 \wedge r_2 < s_2$.

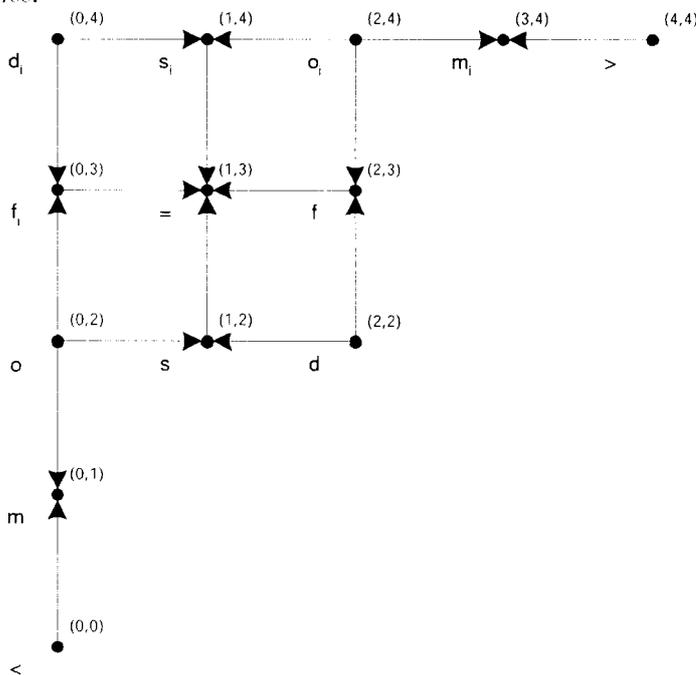
Ligozat définit les relations convexes, notées $[r, s]$, comme celles qui forment un intervalle dans le treillis. Tous les éléments du treillis compris entre r et s appartiennent à $[r, s]$.

La représentation du graphe d'incidence 2.8(b) [12] permet de mettre en évidence les relations préconvexes qui ne diffèrent des convexes que par élimination des atomes qui peuvent être atteints par les relations d'incidence. Ces relations d'incidences sont déterminées à l'aide d'une représentation planaire et implique la définition d'un opérateur de clôture topologique. Il prouve de plus que les préconvexes constituent un ensemble stable pour la composition, correspondant à la classe

FIG. 2.8 – La structure en treillis distributif mis en évidence par G. Ligozat.
 (a) : la relation f est représentée par le couple (2,3)



(b) : le treillis dans le plan. Si on ajoute des flèches représentant les relations d'incidence, on obtient le graphe d'incidence.

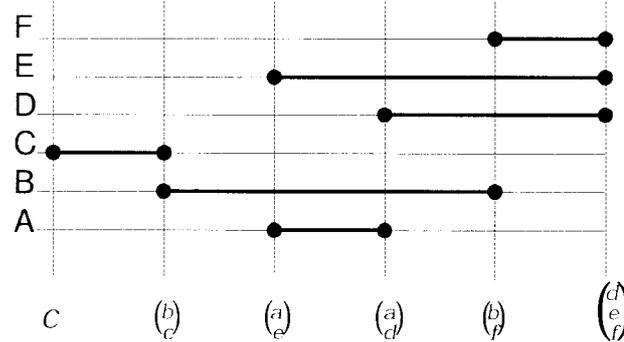


ORD-HORN [13] contenant 867 relations propres (10% de l'algèbre des intervalles). Cet ensemble sera noté \mathcal{H} . C'est la classe maximale traitable. Elle est calculable en temps polynomial. Si elle est construite dans l'algèbre de points, elle s'exprime à l'aide de disjonction de relations concernant les extrémités des intervalles. On a :

$$\mathcal{A}_{13} \subset \mathcal{C}_A \subset \mathcal{E}_c \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{H}$$

Concernant $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{E}_c \subset \mathcal{P}$, on peut remarquer que \mathcal{P} contient 187 relations et représente 2,3% de l'algèbre engendrées par \mathcal{A}_{13} . Il contient les relations qui peuvent être exprimées par $\{\emptyset, <, =, \leq, ?, \geq, >, \neq\}$. \mathcal{E}_c contient 82 relations qui peuvent être exprimées par $\{\emptyset, <, =, \leq, ?, \geq, >\}$, soit 1% des 8192 relations possibles. \mathcal{C}_A formé de 29 relations exprimables à l'aide de $\{\emptyset, <, =, ?, >\}$ ne représente que 0,36%. Mais ces relations permettent par disjonction de les représenter toutes. Par exemple, toute relation d'Allen sur deux intervalles est décomposable en au plus 7 ensembles

FIG. 2.9 – Une chronique dans le formalisme de Schwer



Le mot temporel $c \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ décrit totalement la chronique .

convexes disjoints.

2.3 L'approche de Schwer [17]

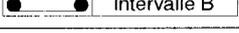
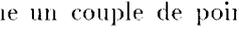
Cette approche consiste à associer à chaque contrainte temporelle un langage rationnel sous forme spécialisée. Elle permet de maintenir globalement toutes les contraintes et rien que les contraintes à l'aide d'opérateurs usuels de l'algèbre des langages formels. L'ensemble des scénarii possibles est un langage régulier. Ce langage est vide si et seulement si le problème est inconsistant.

2.3.1 Instants, chronologies, simultanéité

La relation rencontre "meet" permet exprimer les 13 relations atomiques. C'est la relation pivot. Un intervalle I rencontre un intervalle J si I est avant J et aucun autre intervalle ne s'intercale entre eux. De plus elle permet de définir les points à partir des intervalles de la même façon que Russel définit l'instant : comme classe d'équivalence des périodes de temps qui se rencontrent. Ainsi dans les échelles humaines, à un instant, plusieurs événements peuvent se produire.

Chaque intervalle suppose deux points, ses extrémités. On définit des S-points, "S" pour simultanéité", qui correspondent à des instants. Un S-point contient une extrémité de l'intervalle I et une extrémité de l'intervalle J si et seulement si I rencontre J. Dans le cas de deux intervalles, un S-point contient un ou deux points extrémités d'intervalles. Sur n intervalles, ils peuvent contenir n points extrémités d'intervalles. Ainsi les mots temporels peuvent porter sur plus de 2 intervalles, comme le montre la figure 2.9.

TAB. 2.7 – Les 13 relations de base exprimées en mots temporels

Relation de base	Graphiques	Mot temporel
précède		$aabb$
rencontre		$a \binom{a}{b} b$
chevauche		$abab$
débute		$\binom{a}{b} ab$
pendant		$baab$
termine		$ab \binom{a}{b}$
égale		$\binom{a}{b} \binom{a}{b}$
est-terminé-par		$ab \binom{a}{b}$
contient		$abba$
est-débuté-par		$\binom{a}{b} ba$
est-chevauché-par		$baba$
est-rencontré-par		$b \binom{a}{b} a$
est-précédé-par		$bbaa$
Intervalle A		aa
Intervalle B		bb

En représentant un intervalle comme un couple de points - ces extrémités - de l'ensemble des réels, une relation qualitative entre deux intervalles présente soit deux points (égale), soit trois points (débute, termine, rencontre, est-débuté-par, est-terminé-par, est-rencontré-par) soit quatre points (précède, chevauche, pendant, contient, est-chevauché-par, est-précédé-par) avec la contrainte qui exprime que si deux points sont issus du même intervalle, alors ils sont ordonnés l'un par rapport à l'autre. Les ordres sont donc réalisés sur les S-points qui eux-mêmes peuvent contenir plusieurs points extrémités d'intervalles. Le tableau 2.7 montre les 13 relations de base exprimées dans ce formalisme.

2.3.2 Approche basée sur un langage rationnel

L'opérateur du shuffle (entrelacs), noté ϖ décrit toutes les possibilités que l'on peut avoir quand on fusionne deux chaînes en respectant leur séquence respective.

$$aa\varpi bb = aabb, abab, baab, abba, baba, bbaa.$$

L'auteur construit l'automate déterministe Θ capable d'exprimer l'algèbre de Allen en termes de mots d'un langage formel. La mission de Θ est d'introduire la simultanéité chaque fois que cela est possible de façon univoque.

$$\Theta(aa\varpi bb) = \{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$$

Le formalisme de Schwer, pour traiter de la disjonction, a recours à l'opérateur [opérande 1, opérande 2] qui est une abréviation de $\Theta(\text{opérande 1} \varpi \text{opérande 2})$.

$$|aa,b| = \Theta(aa\varpi b) = \{aab, a\binom{a}{b}, aba, \binom{a}{b}a, baa\}$$

$$|aa,b|b = \Theta(aa\varpi b)b = \{aabb, a\binom{a}{b}b, abab, \binom{a}{b}ab, baab\}$$

Si L et L' sont deux langages, l'union de ces deux langages est $[L | L'] = \cup_{f \in L, g \in L'} [f | g]$.

Le résultat de l'exemple (tableau 4.1.3) :

$$\left[\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ \epsilon \end{pmatrix}, c \right) \left(ca, \begin{pmatrix} a \\ \epsilon \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \epsilon \\ d \end{pmatrix}, f \right] \right]$$

$$\left(c \begin{pmatrix} a \\ b \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ \epsilon \end{pmatrix} c \right) \left(ca, \begin{pmatrix} a \\ \epsilon \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} \left(f \begin{pmatrix} \epsilon \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ d \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ d \end{pmatrix} f \right)$$

représente 18 mots ($3*2*1*3$). Leur écriture est laissée à la sagacité du lecteur. Le but des mots temporels est d'éviter au maximum les calculs. C'est une évaluation paresseuse.

2.3.3 Un unique opérateur rationnel

L'inversion n'a pas de sens pour le raisonnement. Pourquoi: les graphes sont orientés donc induisent une dissymétrie entre les deux intervalles, pas les mots. Rappelons que si $A \prec B$ alors $B \prec^{-1} A$. Un mot temporel décrit à la fois les intervalles (les extrémités en minuscule) et la relation entre ces intervalles (la position relative de deux minuscules différentes). Par exemple le mot $b\binom{a}{b}a$ correspond, dans le système de Allen à $a m_i b \Leftrightarrow b m a$.

La saturation d'un mot sur l'alphabet X , notée f_X permet d'étendre la description écrite originellement dans un alphabet plus réduit. Une contrainte met en jeu une partie des intervalles, mais concerne l'ensemble. Toujours dans le but de minimiser les calculs, tout intervalle non représenté dans un mot mais présent dans la spécification est considéré comme ayant une contrainte universelle avec les intervalles participants. Ce qui permet d'exprimer toutes les contraintes sur le meme alphabet, donc de pouvoir faire des intersections. Comme l'alphabet est étendu, le résultat comporte la description originelle avec prise en compte des nouveaux intervalles. Il n'y aucune hypothèse émise sur ces nouveaux intervalles, le résultat exprime donc toutes les nouvelles possibilités: il consiste en des mots plus longs mais aussi beaucoup plus nombreux. D'où le nom de l'opération. En interne, l'opérateur utilise le shuffle et a recours à Θ pour créer la simultanéité.

Soit $Y \subset X$ et $L \subset Y^*$ un langage de chroniques écrites sur Y , sa saturation sur X est: $f_X L = \cup_{z \in X-Y} [zz | L]$.

La projection sur $\{a,b\}$, notée $\pi\{a,b\}$, permet d'effacer dans un mot toute description concer-

nant des intervalles étrangers à la liste spécifiée, ici A et B. $\pi\{a, b\}(a \binom{a}{c} bbc) = aabb$.

Enfin, un problème de satisfaction de contraintes sur un ensemble I de n intervalles avec $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ayant k chroniques L sur leurs alphabets respectifs $Y_{1, \dots, k}$ décrivant les sous ensembles $J_{1, \dots, k}$ de I peut se résumer ainsi :

$$\bigcap_X L_i \neq \emptyset.$$

C'est la base du raisonnement de notre moteur.

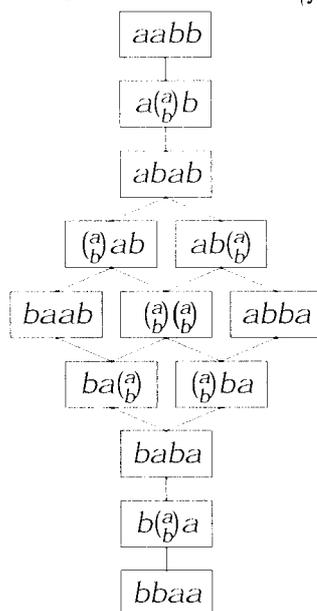
Chapitre 3

Classification topologique des relations convexes

Nous proposons une taxonomie des 82 relations convexes propres (non vides) possibles entre deux intervalles en 15 classes, dénommées spectres et 38 sous-classes, dénommées patrons. Nous utilisons l'approche de Schwer. Une relation convexe est une partie convexe du treillis des 13 relations convexes présenté dans la figure 3.1. Les spectres sont exactement tous les ordres sur au plus 4 points. Les patrons utilisent la notion de A-voisinage de Freksa. Le but de cette taxonomie est d'offrir à l'utilisateur une palette de 15 icônes spectrales. Après avoir choisi une icône, il peut la spécialiser en un patron sur lequel il ne lui reste plus qu'à indiquer l'identifiant des deux intervalles considérés pour décrire leurs relations possibles. Une fois ces spécifications faites, l'utilisateur demande la résolution de son problème par le système. L'ensemble des solutions possibles lui est fourni sous forme graphique.

En représentant un intervalle comme un couple de points - ces extrémités - de l'ensemble des réels, une relation qualitative entre deux intervalles présente soit deux points (égale), soit trois points (débute, termine, rencontre, est-débuté-par, est-terminé-par, est-rencontré-par) soit quatre points (précède, chevauche, pendant, contient, est-chevauché-par, est-précédé-par) avec la contrainte qui exprime que si deux points sont issus du même intervalle, alors ils sont ordonnés l'un par rapport à l'autre. Les ordres sont donc réalisés sur les S-points qui eux-mêmes peuvent contenir plusieurs points extrémités d'intervalles. La contrainte signifie aussi qu'un S-point ne peut pas comporter deux extrémités issues d'un même intervalle. Le tableau 2.7 montre les 13 relations de base exprimées dans ce formalisme.

FIG. 3.1 – Le treillis des 13 relations de Allen (formalisme de Schwer)



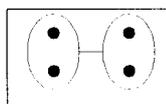
Un S-point singleton est représenté par \bullet , sinon par \odot pour 2 intervalles.

3.1 Détermination des 15 spectres

Une recherche exhaustive fournit 15 ordres possibles satisfaisant la contrainte énoncée sur au plus 4 points qui sont les 15 spectres suivants.

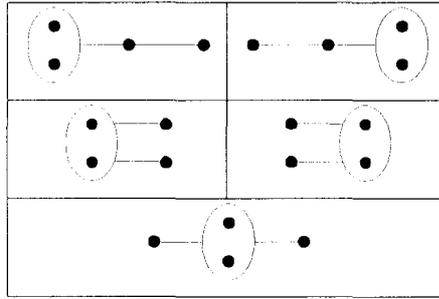
3.1.1 Spectres de taille 2

Il n'existe qu'un ordre possible satisfaisant la contrainte énoncée. Cet ordre correspond à l'égalité des deux intervalles.



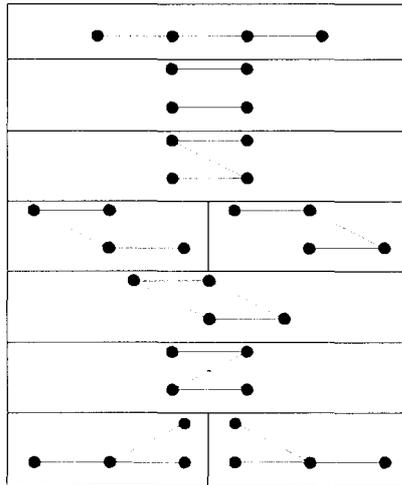
3.1.2 Spectres de taille 3

Sur 3 points, il y en a un qui correspond à une extrémité commune des deux intervalles, les deux autres points sont liés à ce point commun par la relation d'ordre. Ce qui donne les 5 possibilités suivantes - dont deux symétries chirales.



3.1.3 Spectres de taille 4

Quatre points définissent deux couples de points liés entre eux par la relation d'ordre. Ce qui donne 9 possibilités, dont deux symétries chirales.



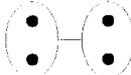
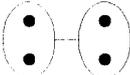
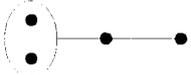
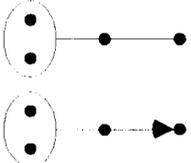
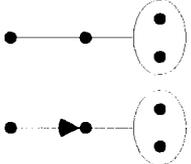
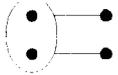
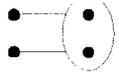
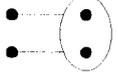
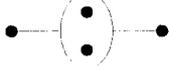
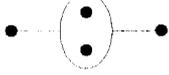
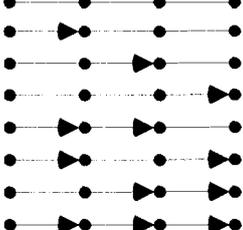
3.2 Patrons

Les spectres sont habillés avec la notion de A -voisinage, au sens de Freksa [5] (sens de la flèche). Ce qui signifie qu'un point peut venir fusionner avec un point qui est lié à lui par l'ordre mais pas par la contrainte (i.e. un point de l'autre intervalle). Sans cette notion de voisinage, on ne peut pas classer \mathcal{E}_c . On obtient seulement \mathcal{C}_A comme le montre le tableau 3.9.

Pour chaque spectre, une étude exhaustive de la possibilité d'introduire de telle flèche est étudiée. En particulier, il n'existe pas de flèche entrant ou sortant d'un point représentant deux extrémités d'intervalles confondues, pas de flèche sur les liens dus à la contrainte car cela permettrait de transformer un intervalle en un simple point.

Les 38 patrons sont exposés dans le tableau 3.1 et le tableau 3.2.

Tab. 3.1 - Les patrons

Classes	Patrons
	
	
	
	
	
	
	

TAB. 3.2 - Les patrons (suite)

Classes	Patrons
 	 
 	   
 	   
 	   
 	      
 	     
 	      
 	      

3.3 Classification des ensembles convexes

Suivant le formalisme des mots temporels [17], à chaque intervalle est attribuée une lettre.

Soit a et b les deux lettres attribuées aux deux intervalles considérés, le jeu consiste à étiqueter les points du graphe par ces lettres en respectant la sémantique des intervalles. Le tableau 3.3 récapitule les 83 ensembles convexes suite à l'étiquetage des patrons.

3.4 Traduction de cette classification dans d'autres formalismes

La traduction dans d'autres formalisme est immédiate. Aussi le tableau 3.4 donne la classification dans le formalisme de Allen. Les tableaux 3.5 et 3.7 utilisent les icônes de Freksa.

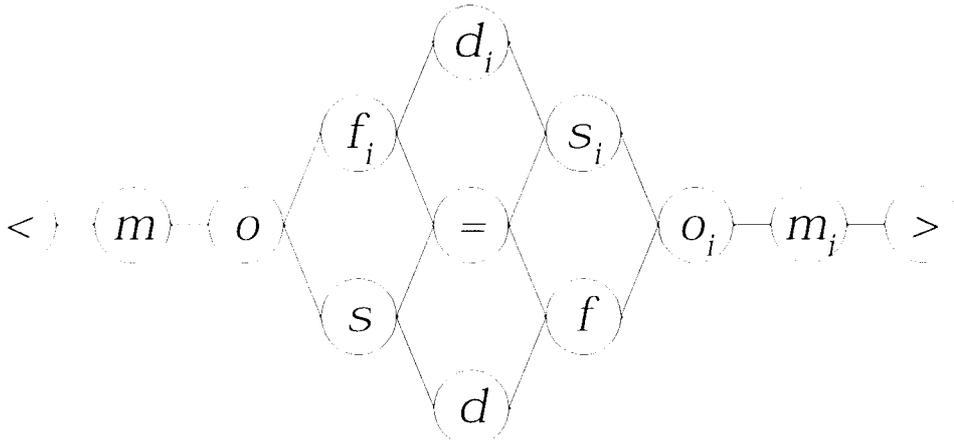
TAB. 3.3 – La classification des ensembles convexes (formalisme de Schwer)

Patrons	Ensembles convexes	N
	$\left\{ \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}$	1
	$\left\{ \binom{a}{b} ab \right\}, \left\{ \binom{a}{b} ba \right\}$	2
	$\left\{ \binom{a}{b} ab, \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}, \left\{ \binom{a}{b} ba, \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}$	2
	$\left\{ ab \binom{a}{b} \right\}, \left\{ ba \binom{a}{b} \right\}$	2
	$\left\{ ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}, \left\{ ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b} \right\}$	2
	$\left\{ \binom{a}{b} ab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba \right\}$	1
	$\left\{ ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b} \right\}$	1
	$\left\{ a \binom{a}{b} b \right\}, \left\{ b \binom{a}{b} a \right\}$	2
	$\{aabb\}, \{abab\}, \{abba\}, \{bbaa\}, \{baba\}, \{baab\}$	6
	$\{abab, \binom{a}{b} ab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba\}, \{baba, \binom{a}{b} ba\}, \{baab, \binom{a}{b} ab\}$	4
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b\}, \{abab, a \binom{a}{b} b\}, \{bbaa, b \binom{a}{b} a\}, \{baba, b \binom{a}{b} a\}$	4
	$\{abab, ab \binom{a}{b}\}, \{abba, ab \binom{a}{b}\}, \{baba, ba \binom{a}{b}\}, \{baab, ba \binom{a}{b}\}$	4
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, a \binom{a}{b} b\}, \{baba, \binom{a}{b} ba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}$ $\{baba, \binom{a}{b} ba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}, \{baab, \binom{a}{b} ab, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}$	4
	$\{abab, a \binom{a}{b} b, ab \binom{a}{b}\}, \{baba, b \binom{a}{b} a, ba \binom{a}{b}\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, a \binom{a}{b} b, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}, \{baba, \binom{a}{b} ba, b \binom{a}{b} a, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$ $\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	1
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$ $\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, ab \binom{a}{b}, abba\}, \{bbaa, b \binom{a}{b} a, baba, ba \binom{a}{b}, baab\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, \binom{a}{b} ba\}$ $\{\binom{a}{b} ab, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, baab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}\}$ $\{ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab\}, \{baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab\}, \{\binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, ab \binom{a}{b}\}, \{ba \binom{a}{b}, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{aabb, a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}\}, \{\binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a, bbaa\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$ $\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$ $\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	1
	$\{abab, ab \binom{a}{b}, abba\}, \{baab, ba \binom{a}{b}, baba\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, \binom{a}{b} ba\}, \{\binom{a}{b} ab, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, ab \binom{a}{b}, abba\}, \{baab, ba \binom{a}{b}, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, \binom{a}{b} ba\}$ $\{\binom{a}{b} ab, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, baab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, baba\}$	2
	$\{abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}\}, \{ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, baab\}, \{abba, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
	$\{a \binom{a}{b} b, abab, \binom{a}{b} ab, ab \binom{a}{b}, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, ba \binom{a}{b}\}$ $\{ab \binom{a}{b}, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, abba, ba \binom{a}{b}, \binom{a}{b} ba, baba, b \binom{a}{b} a\}$	2
\emptyset	La partie vide	1

TAB. 3.4 · La classification des ensembles convexes (formalisme de Allen)

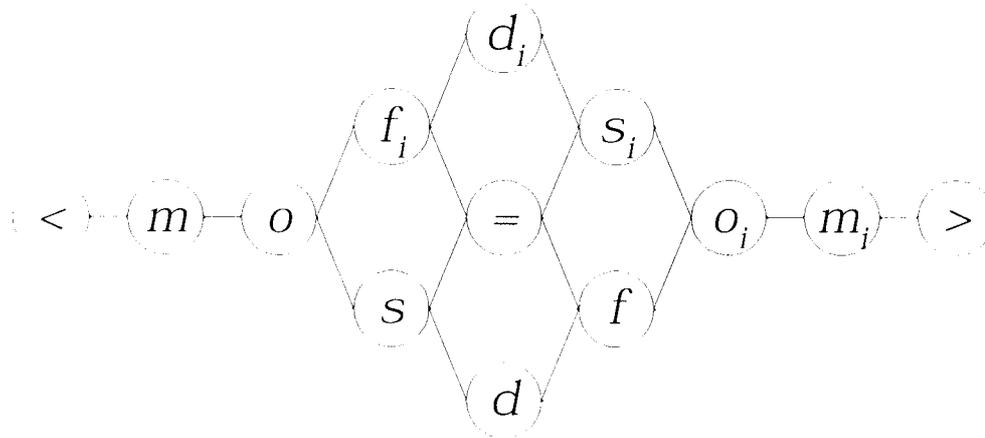
Patrons	Ensembles convexes	N
	$\{=\}$	1
	$\{s\}, \{s_i\}$	2
	$\{s, =\}, \{=, s_i\}$	2
	$\{f\}, \{f_i\}$	2
	$\{f, =\}, \{f_i, =\}$	2
	$\{s, =, s_i\}$	1
	$\{f, =, f_i\}$	1
	$\{m\}, \{m_i\}$	2
	$\{<\}, \{o\}, \{d\}, \{d_i\}, \{o_i\}, \{>\}$	6
	$\{o, s\}, \{d_i, s_i\}, \{s_i, o_i\}, \{d, s\}$	4
	$\{<, m\}, \{o, m\}, \{>, m_i\}, \{o_i, m_i\}$	4
	$\{o, f_i\}, \{d_i, f_i\}, \{o_i, f\}, \{d, f\}$	4
	$\{o, s, m\}, \{o_i, s_i, m_i\}$	2
	$\{o, s, f_i, =\}, \{d_i, s_i, f_i, =\}, \{o_i, s_i, f, =\}, \{d, s, f, =\}$	4
	$\{o, m, f_i\}, \{o_i, m_i, f\}$	2
	$\{o, s, m, f_i, =\}, \{o_i, s_i, m_i, f, =\}$	2
	$\{<, m, o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i, m_i, >\}$	1
	$\{<, m, o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i\}, \{o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i, m_i, >\}$	2
	$\{<, m, o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i, m_i\}, \{m, o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i, m_i, >\}$	2
	$\{<, m, o, f_i, d_i\}, \{>, m_i, o_i, f, d\}$	2
	$\{<, m, o, s, f_i, =, d_i, s_i\}, \{s, d, =, f, s_i, o_i, m_i, >\}$	2
	$\{<, m, o, s, d\}, \{d_i, s_i, o_i, m_i, >\}$	2
	$\{<, m, o, s, f_i, d, =, f\}, \{f_i, =, d_i, f, s_i, o_i, m_i, >\}$	2
	$\{<, m, o\}, \{o_i, m_i, >\}$	2
	$\{<, m, o, s\}, \{s_i, o_i, m_i, >\}$	2
	$\{<, m, o, f_i\}, \{f, o_i, m_i, >\}$	2
	$\{<, m, o, s, f_i, =\}, \{=, f, s_i, o_i, m_i, >\}$	2
	$\{o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i\}$	1
	$\{m, o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i\}, \{o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i, m_i\}$	2
	$\{m, o, s, f_i, d, =, d_i, f, s_i, o_i, m_i\}$	1
	$\{o, f_i, d_i\}, \{d, f, o_i\}$	2
	$\{o, s, f_i, =, d_i, s_i\}, \{s, d, =, f, s_i, o_i\}$	2
	$\{m, o, f_i, d_i\}, \{d, f, o_i, m_i\}$	2
	$\{m, o, s, f_i, =, d_i, s_i\}, \{s, d, =, f, s_i, o_i, m_i\}$	2
	$\{o, s, d\}, \{d_i, s_i, o_i\}$	2
	$\{o, s, f_i, d, =, f\}, \{f_i, =, d_i, f, s_i, o_i\}$	2
	$\{m, o, s, d\}, \{d_i, s_i, o_i, m_i\}$	2
	$\{m, o, s, f_i, d, =, f\}, \{f_i, =, d_i, f, s_i, o_i, m_i\}$	2
\emptyset	La partie vide	1

TAB. 3.5 – La classification des ensembles convexes (formalisme de freksa)



Patrons	Ensembles convexes (Freksa)	N
		1
		2
		2
		2
		1
		1
		2
		6
		4
		4
		4
		2
		4
		2
		2
		1
		2
		2
		2
		2
		2
		2

TAB. 3.7 - La classification des ensembles convexes (formalisme de freksa) - suite



Patrons	Ensembles convexes (Freksa)	N
		2
		2
		2
		2
		1
		2
		1
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
\emptyset		1

Tab. 3.9 - Classification topologique de \mathcal{C}_A

Description de la relation	Notation	Icone	Patron	Icone	Notation	Description de la relation
La partie vide			\emptyset			
Relation de base						
equal	=					
starts	s				s_i	started-by
finishes	f				f_i	finished-by
meets	m				m_i	met-by
before	<				>	after
overlaps	o				o_i	overlapped-by
during	d				d_i	contains
Relation floue						
head to head with	hh					
tail to tail with	tt					
universal	?					
born before death of	bd				db	died after birth of
older	ol				yo	younger
survived by	sb				sv	survives
older and survived by	ob				ys	younger and survives
contemporary of	ct					
older contemporary of	oc				yc	younger contemporary of
survived by contemporary of	bc				sc	surviving contemporary of

Chapitre 4

Les patrons étiquetés

Le but de ce chapitre est de montrer l'utilisation et l'intérêt de la classification introduite dans le chapitre précédent. La première section présente un exemple de manipulation. La deuxième section permet de montrer certaines propriétés des E-patrons. La section 3 porte sur les opérations sur les E-patrons. La dernière section évoque des pistes pour s'affranchir de la limitation aux relations convexes à l'aide de l'exemple donné par Allen.

Un ensemble convexe est représenté par des patrons dont les nœuds sont les points étiquetés par des lettres. Un E-patron est un patron étiqueté.

4.1 Etude détaillée de l'exemple

Nous reprenons l'exemple de l'introduction concernant un ensemble d'informations temporelles sur les arrêts de trains dans une gare.

4.1.1 Enoncé (Rappel)

On considère un ensemble de six trains A, B, C, D, E et F dont les contraintes temporelles sont les suivantes :

1. les trains A, B et E arrivent à quai en même temps, mais A repart avant B,
2. A part après ou en même temps que C, mais avant l'arrivée de D,
3. D et F arrivent à l'instant où B part,
4. E et D repartent en même temps.

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : combien de voies faut-il au minimum pour satisfaire ces contraintes ?

4.1.2 Spécification

La durée de stationnement de chaque train est un intervalle, que nous dénotons par le mot de deux lettres minuscules correspondants.

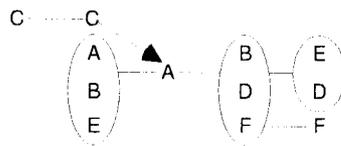
Notre alphabet de travail est $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et la configuration initiale (sans les contraintes) est a-a, b-b, c-c, d-d, e-e, f-f.

4.1.3 Calcul du problème

La spécification est faite dans le tableau suivant.

Etat du système	Patron étiqueté
Prise en compte de la contrainte n°1	
A arrive en même temps que B mais repart avant B	
A arrive en même temps que E, sans connaissance de leur départs respectifs	
Prise en compte de la contrainte n°2	
A part après ou en même temps que C	
A part avant l'arrivée de D	
Prise en compte de la contrainte n°3	
F arrive à l'instant où B part	
D arrive à l'instant où B part	
Prise en compte de la contrainte n°4	
E et D repartent en même temps	

4.1.4 Réponse

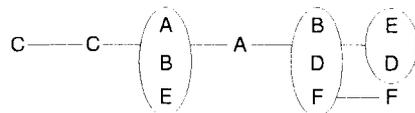


Le patron étiqueté obtenu est équivalent dans le formalisme de Schwer à la disjonction suivante représentant 18 mots temporels :

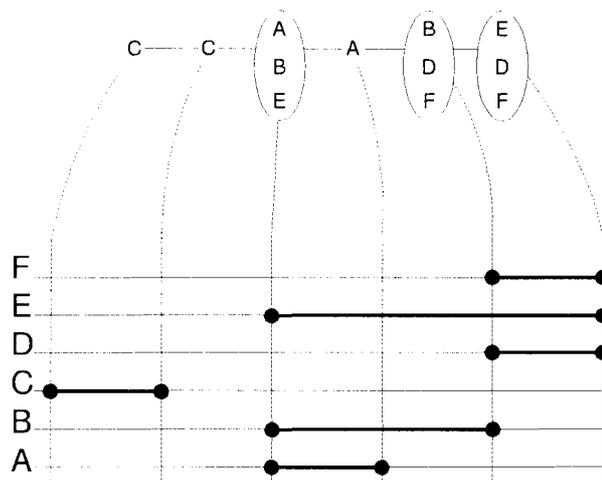
$$\left[\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right), c \right] \left(ca, \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right) \right) \left(\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} \right) \left[\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right), f \right]$$

En raison de problème de sécurité, “un train arrivant en même temps que le départ d’un autre train” nécessite deux voies distinctes. Donc il faut prévoir au minimum 4 voies : A, B et E occupent à un moment 3 voies, mais la voie occupée par A se trouve libre avant l’arrivée de D et F. On peut donc mettre D à la place de A et installer F sur la quatrième voie. On peut, d’après la lecture du graphe, imposer le départ de C avant l’arrivée des trains A, B et E et placer C sur l’une des 4 voies. Ce qui fait disparaître la flèche.

Ces contraintes modifient le E-patron qui devient le suivant :



Il reste encore un choix concernant le départ de F qui peut se faire avant, en même temps ou après les départs simultanés de D et E. Choisissons de minimiser le nombre d’instantés créés. Nous obtenons alors la chronologie suivante :



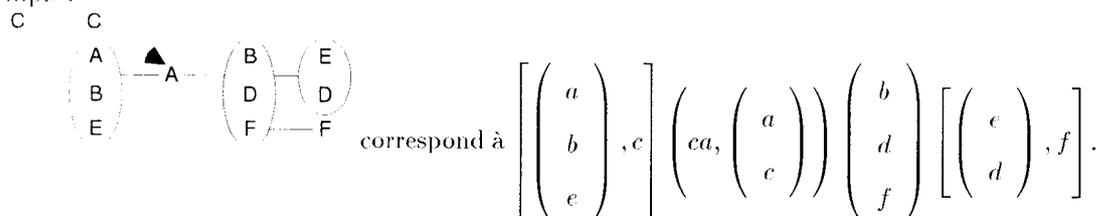
Il ne reste plus qu'à assigner des dates à chacun des 6 instants de cette chronologie.

4.2 Propriétés des patrons étiquetés

4.2.1 Patron étiqueté et mots temporels

Par définition, un patron étiqueté correspond à une disjonction de mots temporels. Plus exactement, chacun des E-patron est directement traduisible en un langage rationnel [17]. Le tableau 3.3 le montre bien.

Pour les patrons étiquetés décrivant plus de deux intervalles, c'est la même chose. Voici un exemple :



4.2.2 Equivalent ponctuel d'un patron étiqueté

Rappelons qu'un patron étiqueté est une relation convexe. Or $\mathcal{E}_c \subset \mathcal{P}$ donc chaque patron étiqueté a un équivalent ponctuel. Pour s'en persuader, le tableau 4.1 donne les équivalents ponctuels des ensembles convexes. Cet équivalent ponctuel est en fait un système d'inéquations linéaires.

4.2.3 Patron étiqueté et graphe de dépendance

Les informations qui sont lues sur un E-patron sont celles d'un graphe de dépendance complet et minimal. Ainsi, comme le montrera l'exemple complet étudié dans la dernière section de ce chapitre, le graphe de la figure 2.2 donne les informations correspondant au patron suivant :



On voit que le positionnement relatif de tous les intervalles dans un E-patron est visuel. C'est un atout par rapport au graphe de dépendance. Il faut noter d'autres travaux qui ont proposé une représentation graphique autre que les réseaux de dépendances.

Les graphes de *meet* de Revault [16] permettent, tout en conservant le concept d'intervalles, de raisonner sur un ensemble fini quelconque d'intervalles. Son approche calculatoire est la même que celle que nous avons suivie : celle de pièces de Lego. Mais les graphes obtenus sont schématiquement

TAB. 4.1 – Ensembles convexes et équivalents ponctuels

Patrons	Équivalents ponctuels	N
	$\{a^- = b^- < a^+ = b^+\}$	1
	$\{a^- = b^- < a^+ < b^+\}, \{a^- = b^- < b^+ < a^+\}$	2
	$\{a^- = b^- < a^+ \leq b^+\}, \{a^- = b^- < b^+ \leq a^+\}$	2
	$\{a^- < b^- < a^+ = b^+\}, \{b^- < a^- < a^+ = b^+\}$	2
	$\{a^- \leq b^- < a^+ = b^+\}, \{b^- \leq a^- < a^+ = b^+\}$	2
	$\{a^- = b^- < a^+ \wedge b^- < b^+\}$	1
	$\{a^- < a^+ = b^+ \wedge b^- < b^+\}$	1
	$\{a^- < a^+ = b^- < b^+\}, \{b^- < a^- = b^+ < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ < b^- < b^+\}, \{a^- < b^- < a^+ < b^+\}, \{b^- < a^- < a^+ < b^+\}$ $\{a^- < b^- < b^+ < a^+\}, \{b^- < a^- < b^+ < a^+\}, \{b^- < b^+ < a^- < a^+\}$	6
	$\{a^- \leq b^- < a^+ < b^+\}, \{b^- \leq a^- < a^+ < b^+\}$ $\{a^- \leq b^- < b^+ < a^+\}, \{b^- \leq a^- < b^+ < a^+\}$	4
	$\{a^- < a^+ \leq b^- < b^+\}, \{a^- < b^- \leq a^+ < b^-\}$ $\{b^- < a^- \leq b^+ < a^+\}, \{b^- < b^+ \leq a^- < a^+\}$	4
	$\{a^- < b^- < a^+ \leq b^+\}, \{b^- < a^- < a^+ \leq b^+\}$ $\{a^- < b^- < b^+ \leq a^+\}, \{b^- < a^- < b^+ \leq a^+\}$	4
	$\{a^- \leq b^- \leq a^+ < b^+\}, \{b^- \leq a^- \leq b^+ < a^+\}$	2
	$\{a^- \leq b^- < a^+ \leq b^+\}, \{b^- \leq a^- < a^+ \leq b^+\}$ $\{a^- \leq b^- < b^+ \leq a^+\}, \{b^- \leq a^- < b^+ \leq a^+\}$	4
	$\{a^- < b^- \leq a^+ \leq b^-\}, \{b^- < a^- \leq b^+ \leq a^+\}$	2
	$\{a^- \leq b^- \leq a^+ \leq b^-\}, \{b^- \leq a^- \leq b^+ \leq a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ \wedge b^- < b^+\}$	1
	$\{a^- < a^+ \wedge b^- < b^+ \wedge a^- < b^+\}, \{b^- < b^+ \wedge a^- < a^+ \wedge b^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ \wedge b^- < b^+ \wedge a^- \leq b^+\}, \{b^- < b^+ \wedge a^- < a^+ \wedge b^- \leq a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ \wedge a^- < b^- < b^+\}, \{b^- < b^+ \wedge b^- < a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ \wedge a^- \leq b^- < b^+\}, \{b^- < b^+ \wedge b^- \leq a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ < b^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- < b^+ < a^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ \leq b^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- < b^+ \leq a^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ < b^+ \wedge a^- < b^- < b^+\}, \{b^- < b^+ < a^+ \wedge b^- < a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ < b^+ \wedge a^- \leq b^- < b^+\}, \{b^- < b^+ < a^+ \wedge b^- \leq a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ \leq b^+ \wedge a^- < b^- < b^+\}, \{b^- < b^+ \leq a^+ \wedge b^- \leq a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ \wedge b^- < b^+ \wedge a^- < b^+ \wedge b^- < a^+\}$	1
	$\{a^- < a^+ \wedge b^- < b^+ \wedge a^- \leq b^+ \wedge b^- < a^+\}$ $\{b^- < b^+ \wedge a^- < a^+ \wedge b^- \leq a^+ \wedge a^- < b^+\}$	2
	$\{a^- < a^+ \wedge b^- < b^+ \wedge a^- \leq b^+ \wedge b^- \leq a^+\}$	1
	$\{a^- < b^- < a^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- < a^- < b^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- \leq b^- < a^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- \leq a^- < b^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < b^- \leq a^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- < a^- \leq b^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- \leq b^- \leq a^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- \leq a^- \leq b^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < b^+ < a^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- < a^+ < b^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- < b^+ \leq a^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- < a^+ \leq b^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- \leq b^+ < a^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- \leq a^+ < b^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
	$\{a^- \leq b^+ \leq a^+ \wedge b^- < b^+\}, \{b^- \leq a^+ \leq b^+ \wedge a^- < a^+\}$	2
\emptyset	La partie vide	1

moins directement traduisibles en scénarii car les intervalles y sont représentés par des points sur le graphe et non par des segments, moyen usuel de représenter les intervalles. Notre représentation, fondée sur des relations topologiques entre points, conserve néanmoins la sémantique des intervalles. En effet, les points des graphes sont conceptuellement le support matériel de ces intervalles. Un point correspond à une partie des intervalles suivant la relation l'intervalle I est représenté dans le même point que l'intervalle J si et seulement si I rencontre J.

Utilisant l'équivalence de l'algèbre d'instantes et de l'algèbre d'intervalles restreinte, des réseaux ou treillis d'instantes ont été développés pour calculer des scénarii globaux comme dans le système IxTeT [7] ou dans les graphes de scénarii temporels de Fontaine [4]. Ces graphes détruisent la sémantique des intervalles. Il y a une ressemblance visuelle entre nos graphes et ces réseaux d'instantes mais l'interprétation des points n'est pas la même. En effet, dans notre formalisme, un point représente un instant temporel, rencontre possible de plusieurs événements et non des extrémités d'intervalles. L'étiquetage informe de l'ensemble des intervalles commençant ou se terminant à l'instant étiqueté.

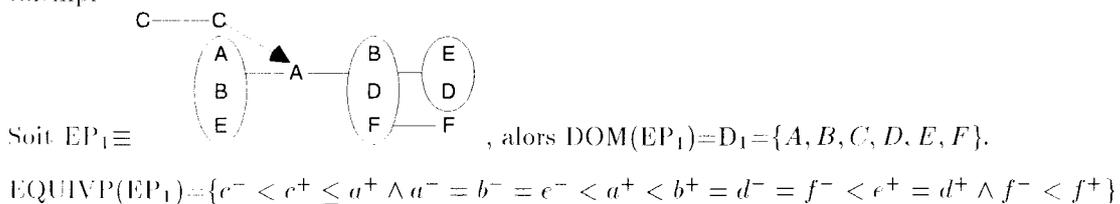
4.3 Opérations sur les patrons étiquetés

4.3.1 Notion de domaine d'un E-patron

Un patron étiqueté est la spécification minimale des contraintes temporelles entre plusieurs intervalles. Un E-patron est un patron qui est étiqueté, c'est à dire qu'il décrit le positionnement relatif d'intervalles parfaitement identifiés.

On appelle domaine d'un patron étiqueté l'ensemble des intervalles dont le positionnement relatif est décrit par lui. Il correspond à l'alphabet des mots temporels.

Exemple



4.3.2 Opérations unaires

Restriction d'un E-patron

Cette opération correspond à la projection d'un mot temporel. Soit un domaine D' un sous-ensemble de D . Le E-patron EP' , restriction de EP à D' , est obtenu par élimination des intervalles qui n'appartiennent pas à D' de telle manière qu'il y a parfaite conservation des contraintes spécifiées entre chaque élément de D' .

Exemple :

Domaine	Patron étiqueté
Patron original (EP_1)	
$D_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$.	
	$\{c^- < c^+ \leq a^+ \wedge a^- = b^- = c^- < a^+ < b^+ = d^- = f^- < c^+ = d^+ \wedge f^- < f^+\}$
$EP_2 = \text{RESTRICT}_{\{A, B, C, D, E\}}(EP_1)$	
$D_2 = \{A, B, C, D, E\} \subset D_1$	
	$\{c^- < c^+ \leq a^+ \wedge a^- = b^- = c^- < a^+ < b^+ = d^- < c^+ = d^+\}$

Un exemple moins évident :

Domaine	Patron étiqueté
Patron original (EP)	
$D = \{A, B, C, D, E\}$.	
	$\{c^- < c^+ \leq a^+ < d^- < d^+ \wedge a^- = b^- = e^- < a^+ < b^+ \wedge e^- < e^+\}$
$EP' = \text{RESTRICT}_{\{B, C, D, E\}}(EP)$	
$D' = \{B, C, D, E\} \subset D$	
	$\{e^- < c^+ < d^- < d^+ \wedge b^- = e^- < b^+ \wedge e^- < e^+ \wedge b^- < d^- \wedge c^+ < b^+\}$

Extension d'un E-patron

C'est le pendant de la saturation d'un mot temporel sur un alphabet plus étendu. Soit un domaine D'' un sur-ensemble de D . Le E-patron E'' , extension de EP à D'' , est obtenu par ajout de la contrainte universelle $\overset{\bullet}{\text{---}}\overset{\bullet}{\text{---}}$ entre chaque élément de $D \Delta D''$, différence symétrique de D et D'' (les éléments de l'un qui ne sont pas dans l'autre). Ainsi dans le E-patron étendu, les nouveaux intervalles n'ont aucun lien avec les anciens.

Exemple:

Domaine	Patron étiqueté
Patron original (EP_1)	
$D_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$	
$\{c^- < c^+ \leq a^+ \wedge a^- = b^- = c^- < a^+ < b^+ = d^- = f^- < e^+ = d^+ \wedge f^- < f^+\}$	
$EP_3 = EXT^{\{A, B, C, D, E, F, G, H\}}(EP_1)$	
$D_3 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\} \supset D_1$	
$\{c^- < c^+ \leq a^+ \wedge a^- = b^- = c^- < a^+ < b^+ = d^- = f^- < e^+ = d^+ \wedge f^- < f^+ \wedge g^- < g^+ \wedge h^- < h^+\}$	

Concernant les équivalents ponctuels, il suffit d'ajouter $\wedge g^- < g^+ \wedge h^- < h^+$.

Inversion ou transposition d'un E-patron

Comme dans les mots temporels, la transposition d'un E-patron n'a pas de sens. Le transposé est le miroir mais il n'est pas stable après intersection.

Patron original		Transposé	
Formalisme de Freksa	Patron Étiqueté	Formalisme de Freksa	Patron étiqueté

On remarque qu' au niveau de 2 intervalles, l'inversion conserve le patron.

Equivalent ponctuel	Patron étiqueté
Patron original	
$\{a^- = b^- < a^+ < b^+ \wedge a^+ < c^- < c^+\}$	
Transposé	
$\{c^- < c^+ \leq a^- = b^- < b^+ < a^+\}$	

4.3.3 Opérations binaires

Intersection de deux E-patrons (au sens des graphes)

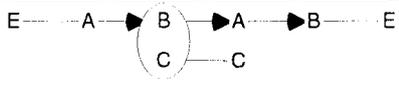
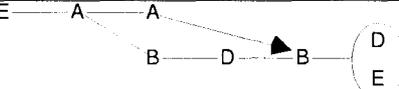
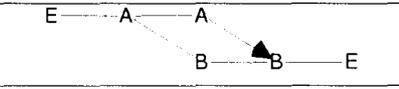
Soit deux E-patrons EP' et EP'' de domaines respectifs D' et D'' . Soit $F = D' \cap D''$. EP , intersection de EP' et EP'' , noté $EP' \cap EP''$, a pour domaine F . Il est obtenu par intersection des contraintes entre les mêmes intervalles de $RESTRICT_F(EP')$ et de $RESTRICT_F(EP'')$.

Si les alphabets sont identiques, $\cap \equiv \oplus$.

Exemple 1:

Formalisme de Freksa	Patrons étiquetés

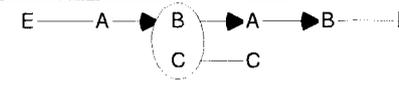
Exemple 2:

Domaine	Patron étiqueté
EP'	
$D' = \{A, B, C, E\}$.	
$\{c^- < a^- \leq b^- = c^- \leq a^+ \leq b^+ < e^+ \wedge c^- < c^+\}$	
EP''	
$D'' = \{A, B, D, E\}$	
$\{c^- < a^- < a^+ \leq b^+ \wedge a^- < b^- < d^- < b^+ < d^+ = e^+\}$	
RESTRICT _{A,B,E} (EP')	
$F = \{A, B, E\}$	
$\{c^- < a^- \leq b^- \leq a^+ \leq b^+ < e^+\}$	
RESTRICT _{A,B,E} (EP'')	
$F = \{A, B, E\}$	
$\{c^- < a^- < a^+ \leq b^+ \wedge a^- < b^- < b^+ < e^+\}$	
EP' ∩ EP''	
$F = \{A, B, E\}$	
$\{c^- < a^- \leq b^- \leq a^+ < b^+ < e^+\}$	

Union de deux E-patrons

Soit deux E-patrons EP' et EP'' de domaines respectifs D' et D''. Soit $G = D' \cup D''$. EP, union de EP' et EP'', noté $EP' \cup EP''$, a pour domaine G. Il est obtenu par union des contraintes entre les mêmes intervalles de $EXT^G(EP')$ et de $EXT^G(EP'')$.

Exemple :

Domaine	Patron étiqueté
EP'	
$D' = \{A, B, C, E\}$.	

Domaine	Patron étiqueté
	$\{e^- < a^- \leq b^- = e^- \leq a^+ \leq b^+ < e^+ \wedge e^- < e^+\}$
	EP''
$D'' = \{A, B, D, E\}$	
	$\{e^- < a^- < a^+ \leq b^+ \wedge a^- < b^- < d^- < b^+ < d^+ = e^+\}$
	$EXT^{\{A,B,C,D,E\}}(EP')$
$G = \{A, B, C, D, E\}$	
	$\{e^- < a^- \leq b^- = e^- \leq a^+ \leq b^+ < e^+ \wedge e^- < e^+ \wedge d^- < d^+\}$
	$EXT^{\{A,B,C,D,E\}}(EP'')$
$G = \{A, B, C, D, E\}$	
	$\{e^- < a^- < a^+ \leq b^+ \wedge a^- < b^- < d^- < b^+ < d^+ = e^+ \wedge e^- < e^+\}$
	$EP' \cup EP''$
$G = \{A, B, C, D, E\}$	
	Le résultat n'a pas forcément un équivalent ponctuel!

L'ensemble des relations convexes \mathcal{E}_c n'est pas stable pour cette opération, c'est à dire que l'union de deux E-patrons élémentaires ou relation convexe n'est pas une relation convexe :

Formalisme de Freksa	Patrons étiquetés

Cette constatation obère l'intérêt de cette opération. De plus le positionnement de deux intervalles l'un par rapport à l'autre est contextuel. On ne peut pas réduire les configurations. Cependant nous reviendrons sur cette opération dans la dernière section de ce chapitre.

Fusion de deux E-patrons

Le principe est le même que celui des jeux de construction Lego et utilise des algorithmes de recherche de motifs dans les mots. Deux ensembles convexes doivent s'emboîter par collage des points de même étiquettes sans casser les graphes, c'est à dire que les ordres sont compatibles : entre les lettres communes aux deux graphes, les ordres restreints à ces lettres ont une intersection non vide. Ainsi, la fusion correspond à $\bigcap \int_X L_i$ de l'approche de Schwer.

Soit deux E-patrons EP' et EP'' de domaines respectifs D' et D'' . Soit $G=D' \cup D''$. EP , fusion de EP' et EP'' , noté $EP' \oplus EP''$, a pour domaine G . Il est obtenu par intersection des contraintes entre les mêmes intervalles de $EXT^G(EP')$ et de $EXT^G(EP'')$.

Exemple :

Domaine	Patron étiqueté
EP'	
$D' = \{A, B, C, E\}$.	
	$\{e^- < a^- \leq b^- = c^- \leq a^+ \leq b^+ < c^+ \wedge e^- < e^+\}$
EP''	
$D'' = \{A, B, D, E\}$	
	$\{e^- < a^- < a^+ \leq b^+ \wedge a^- < b^- < d^- < b^+ < d^+ = e^+\}$

Domaine	Patron étiqueté
$\text{EXT}^{\{A,B,C,D,E\}}(\text{EP}')$	
$G = \{A, B, C, D, E\}$	
	$\{e^- < a^- \leq b^- = e^- \leq a^+ \leq b^+ < e^+ \wedge e^- < e^+ \wedge d^- < d^+\}$
$\text{EXT}^{\{A,B,C,D,E\}}(\text{EP}'')$	
$G = \{A, B, C, D, E\}$	
	$\{e^- < a^- < a^+ \leq b^+ \wedge a^- < b^- < d^- < b^+ < d^+ = e^+ \wedge e^- < e^+\}$
$\text{EP}' \oplus \text{EP}''$	
$G = \{A, B, C, D, E\}$	
	$\{e^- < a^- \leq b^- \leq a^+ < b^+ < d^+ = e^+ \wedge b^- < d^- < b^+ \wedge e^- < e^+\}$

Bien entendu, $\text{RESTRICT}_F(\text{EP}' \oplus \text{EP}'') = \text{EP}' \cap \text{EP}''$

C'est cette opération qui fait la force de notre approche et surtout nous permet d'échapper à la limitation à deux intervalles qui caractérise les approches de Allen et de Freksa.

4.4 Sortir des relations convexes

Il n'est pas possible d'échapper à l'explosion combinatoire inhérente aux problèmes de disjonction. Toute relation d'Allen sur deux intervalles est décomposable en au plus 7 ensembles convexes disjoints, nombre atteint par l'ensemble $\{aabb, abab, abba, baab, \binom{a}{b} \binom{a}{b}, baba, bbau\}$. Le problème est toujours celui de la complexité[6].

En revanche, le choix d'une heuristique permettant de commencer par les contraintes les plus fortes permet d'en minimiser les effets comme nous le montrons sur l'exemple suivant.

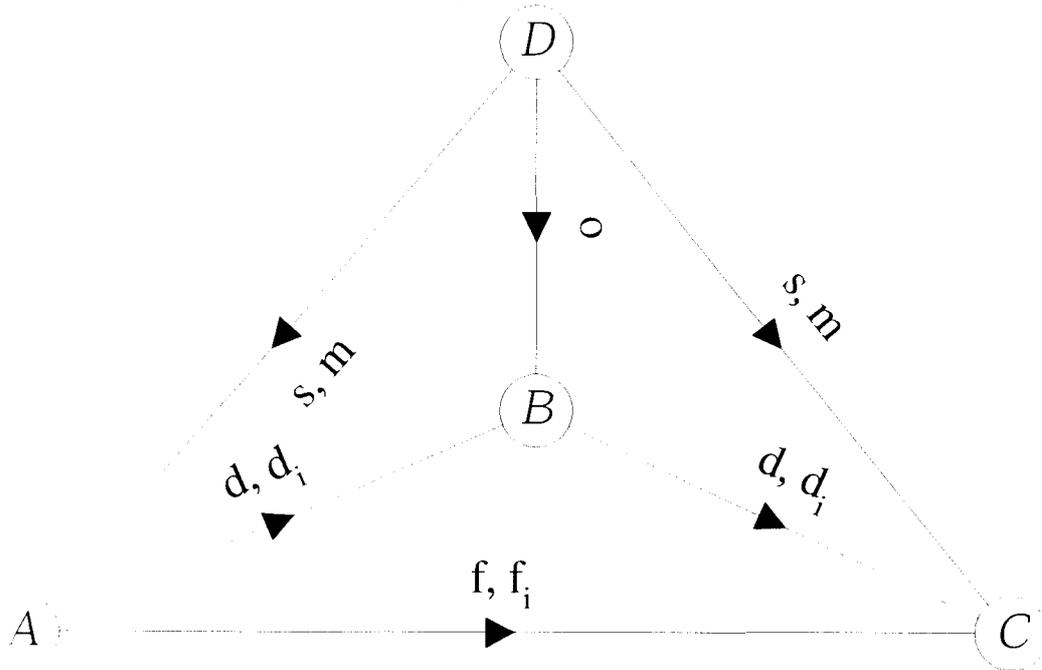
Nous revisitons le graphe d'incompatibilité de Allen [2]. Il se trouve à la figure 4.1.

C et C' sont deux ensembles de patrons étiquetés, l'ensemble des contraintes correspondant à C et C' est

$$C'' = \{c \cap c' \mid c \in C, c' \in C'\}$$

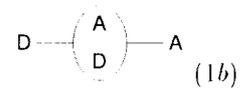
Les relations ne sont pas toutes convexes. On les décompose en union de relations convexes.

FIG. 4.1 Graphe d'incompatibilité de Allen

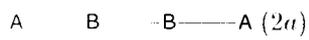


Les contraintes utilisent donc les patrons étiquetés suivants :

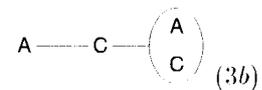
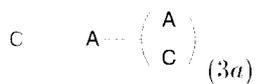
entre A et D: (1) = (1a) ∨ (1b)



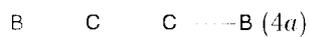
entre A et B: (2) = (2a) ∨ (2b)



entre A et C: (3) = (3a) ∨ (3b)



entre B et C: (4) = (4a) ∨ (4b)



entre B et D:



entre C et D: (6) = (6a) ∨ (6b)

$$\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ D \end{array} \text{---} D \text{---} C \quad (6a)$$

$$D \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right) \text{---} C \quad (6b)$$

Supposons que toutes ces contraintes nous sont spécifiées dès le début, nous allons choisir de commencer par la fusion des contraintes (5) et (6) - (5) car elle est la plus forte, (6) plutôt que (1) par proximité, (6) plutôt que (4) car nous privilégions les plus petits patrons.

$$(5 \wedge 6) = (5 \wedge 6a) \vee (5 \wedge 6b)$$

$$\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ D \end{array} \text{---} B \text{---} D \text{---} B$$

$$D \text{---} B \text{---} \left(\begin{array}{c} D \\ C \end{array} \right) \text{---} B \\ \phantom{D \text{---} B \text{---}} \phantom{D \text{---} B \text{---}} \phantom{D \text{---} B \text{---}} \phantom{D \text{---} B \text{---}} C$$

$$(5 \wedge 6a)$$

$$(5 \wedge 6b)$$

Nous insérons la contrainte la plus forte par rapport au résultat précédent, c'est à dire celle liant B et C ie (4).

$(4a \wedge 6a \wedge 5)$ est le patron vide (\emptyset) car essayer de les connecter les casse. De même $(4b \wedge 6b \wedge 5)$ donne le patron vide. Il ne reste donc plus que deux patrons étiquetés.

$$(4 \wedge 5 \wedge 6) = (4b \wedge 5 \wedge 6a) \vee (4a \wedge 5 \wedge 6b)$$

$$\left(\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right) \text{---} B \text{---} D \text{---} B \text{---} C \quad (4b \wedge 5 \wedge 6a)$$

$$D \text{---} B \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right) \text{---} C \text{---} B \quad (4a \wedge 5 \wedge 6b)$$

Le choix suivant ne permet pas d'échapper à la multiplication (2x2) des patrons étiquetés à cause de l'introduction de A. Choisissons (3).

$$(3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) = (3a \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6a) \vee (3a \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6b) \vee (3b \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6a) \vee (3b \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6b)$$

$$\left(\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right) \text{---} B \text{---} D \text{---} B \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ A \end{array} \right) \quad (3a \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6a)$$

$$A \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right) \text{---} B \text{---} D \text{---} B \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ A \end{array} \right) \quad (3b \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6a)$$

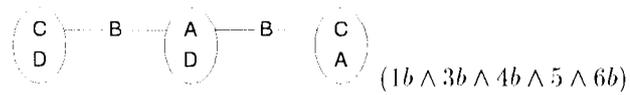
$$D \text{---} B \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right) \text{---} A \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ A \end{array} \right) \text{---} B \quad (3a \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6b)$$

$$D \text{---} B \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ D \\ A \end{array} \right) \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ A \end{array} \right) \text{---} B \quad (3b \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6b)$$

Choisissons (1) qui minimise toujours la taille du patrons. La présence de $\left(\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right)$ élimine plusieurs patrons résultants. On trouve

$$(1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) = (1a \wedge 3b \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6a) \vee (1b \wedge 3a \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6b)$$

$$\left(\begin{array}{c} A \\ D \end{array} \right) \text{---} B \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right) \text{---} \left(\begin{array}{c} C \\ A \end{array} \right) \text{---} B \quad (1a \wedge 3b \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6a)$$



Enfin, comme attendu, on voit que les patrons obtenus donnent pour A et B les patrons étiquetés :

A \cdots B \cdots A \cdots B pour $(1a \wedge 3b \wedge 4a \wedge 5 \wedge 6a)$

et B \cdots A \cdots B \cdots A pour $(1b \wedge 3b \wedge 4b \wedge 5 \wedge 6b)$

Ces patrons sont incompatibles avec (2).

Donc $(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) = \emptyset$

Chapitre 5

Conclusion

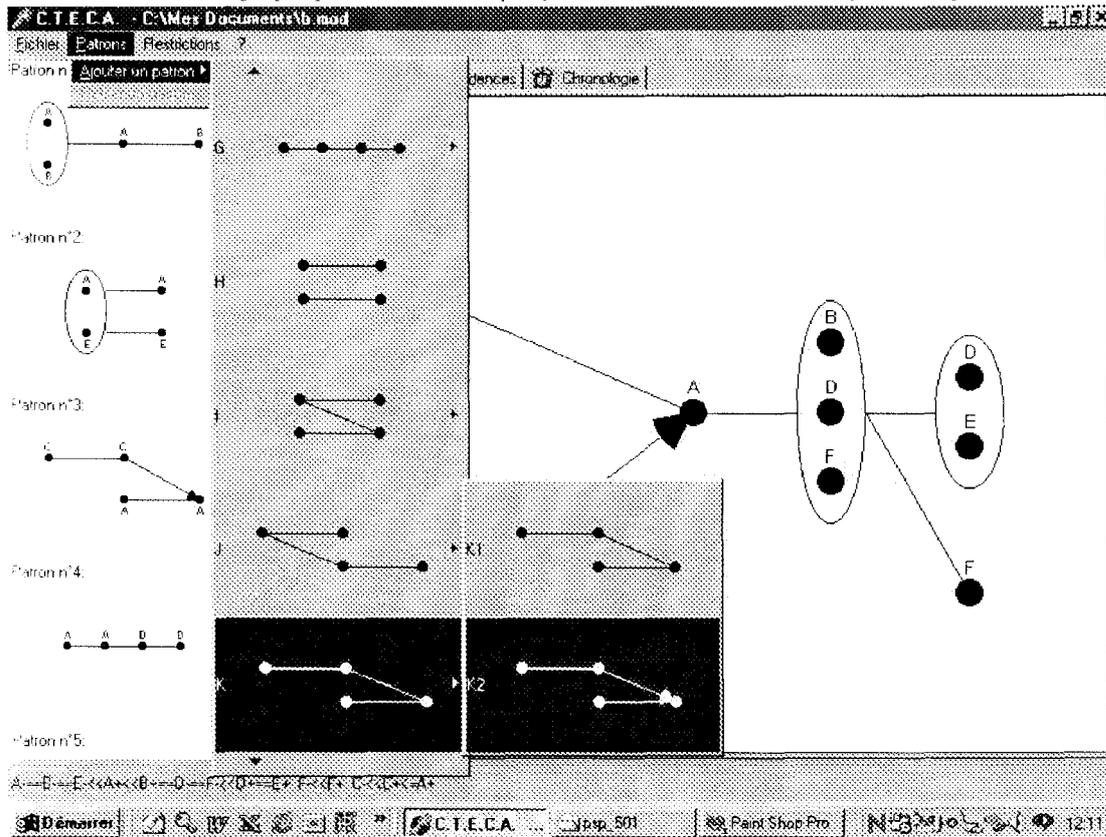
Nous avons fourni dans ce mémoire une taxonomie de la classe des convexes de l'algèbre d'Allen sur deux intervalles. Cette taxonomie, abstraction faite de la partie vide, possède 15 classes et 38 sous-classes (dont les 15 classes), représentées par des graphes dirigés acycliques non étiquetés appelés patrons. Chaque relation convexe d'Allen correspond à l'étiquetage de l'un de ces patrons. Cet étiquetage maintient la sémantique des intervalles. A partir de cette taxonomie, nous développons un outil graphique d'aide à la spécification de contraintes temporelles qualitatives. La figure 5.1 montre un écran du prototype. Le prototype réalisé comprend certaines opérations. Mais il peut être amélioré.

L'opération de fusion est au coeur du système. Mais elle peut être améliorée : les patrons étiquetés ne se construisent qu'à partir des briques élémentaires que sont les 82 ensembles convexes. On peut envisager la fusion de deux patrons étiquetés complexes. Ceci impliquerait des modifications de l'interface graphique. L'opération de restriction est présente. L'opération d'extension se fait à l'aide de la relation universelle.

Des formalismes concurrents peuvent être implémenté pour faciliter les comparaisons entre les approches, base de leur coopération: celui d'Allen, celui des pointisables. Pour l'instant, seule la matrice des instants est intégrée.

Le module de positionnement 3D n'est pas intégré. Seule une chronique est proposée par patron complexe. C'est celle qui minimise les instants. De plus, chaque patron étiqueté, qu'il soit élémentaire ou complexe, dispose d'un équivalent ponctuel. Donc le système donne les informations nécessaire au raisonnement sur une coordonnée. Pour le positionnement d'objets 3D, le raisonnement se fera coordonnées par coordonnées. Une fois les trois chroniques trouvées, le module

FIG. 5.1 - L'outil graphique d'aide à la spécification de contraintes temporelles qualitatives.



considèrera qu'entre 2 points successifs, il y a une distance d'une unité à moins que l'utilisateur fournisse les valeurs réelles compatibles avec les chroniques choisies.

Le logiciel développé n'est pour l'instant qu'un prototype. Il est écrit en utilisant Delphi d'Inprise. Cet outil RAD facilite la définition du logiciel. Une fois sa définition stabilisée, un portage dans un autre langage est possible : en C++ ou java. Ce dernier peut faciliter la diffusion de notre outil (donc de notre approche) sur Internet.

Bibliographie

- [1] J. F. Allen. An Interval-Based Representation of Temporal Knowledge. *Proceedings of the seventh IJCAI, Vancouver, B. C.* (1991) 221-226
- [2] J. F. Allen. Maintening Knowledge about Temporal Interval *Communication of the ACM* 26(11), 1983 832-843.
- [3] M. Crochemore, C. Hancart: Automata for matching patterns in *Handbook of Formal Languages, G. Rosenberg and A. Salomaa. eds, Vol2 Linear Modeling, Springer Verlag 1997* pp399-462.
- [4] D. Fontaine. Une approche par graphes pour la reconnaissance descénarios temporels. *Revue d'Intelligence Artificielle, Vol 10, 1996, pp 439-468*
- [5] C. Freksa. Temporal reasoning based on semi-intervals, *Artificial Intelligence, Vol 54, 1991, pp 199-227.*
- [6] A. Gerevini, L. Schubert. Efficient temporal reasoning through time graphs. *Proceeding of IJCAI'93 (1993) 648-654.*
- [7] M. Ghallab, A. M. Alaoui. Relations temporelles symboliques : représentation set algorithmes. *Revue d'Intelligence Artificielle, Vol 3, 1989 pp 67-115*
- [8] J.-P. Haton & al. *Le raisonnement en intelligence artificielle*. Inter-Editions. Paris, 1991
- [9] Y. Kandrashina. Representation of temporal knowledge. *Proceedings of the Eight IJCAI, Karlsruhe, West Germany. (1983) 346-348*
- [10] P. Ladkin. Time Representation : A Taxonomy of Interval Relations. *Proceedings of the AAAI. (1986) 360-366*
- [11] G. Ligozat. On generalized interval calculi, *Proceedings of the AAAI, Anaheim, C.A.. (1991) 234-240*
- [12] G. Ligozat. Tractable relations in temporal reasonig: pre-convex relations, *Proceedings of the ECAI-94 Workshop on Spatial and Temporal Reasoning, C.A.. (1994) 99-108*

- [13] B. Nebel, H. Bürkert. Reasoning about temporal relations: A maximal tractable subclass of Allen's Interval Algebra. *Journal of the ACM*, 42 (1995) 43-66
- [14] K. Nökel. Convex Relations Between Time Intervals. *Proceedings of the AAAI, Boston, MA*, (1990) 721-727
- [15] V. Popov, L. Popova, G. de Paoli. Vers un langage déclaratif de conception de scènes. ACA-DIA'98, Quebec, Canada, 1998.
- [16] J. Revault. Une modélisation par le graphe de la relation meet pour traiter des contraintes temporelles exprimées à l'aide d'intervalles. Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 14 nov 1996. France
- [17] S. R. Schwer. Raisonnement Temporel: les mots pour le dire. Rapport interne LIPN, 1997. Une nouvelle version est en cours de rédaction. La partie intéressante pour cet article est disponible auprès de l'auteur.
- [18] A. Tarski. On the calculus of relations. *The Journal of Symbolic logic*, vol. 6, n3, sept 1941, p73-89.
- [19] Tansel, Clifford J., Gadia S., Jajodia S., Segev A., Snodgrass R. Temporal databases: theory, design and implementation. Benjamin Cummings (pub), 1993. Chapitre 3: Interval eXtended Relational Model and its Application to valid-time database.
- [20] Project Tempora 2469 & BRA Spec 3096.
- [21] M. Vilain. A system for reasoning about time, *Proceedings of the third AAAI, Pennsylvania, PA* (1982) 197-201
- [22] M. Vilain, H. Kautz. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning, *Proceedings of the fifth AAAI, Philadelphia, PA* (1986) 377-382
- [23] M. Vilain, H. Kautz and P.G. van Beek. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning: a revisited report. in D. S. Weld and J. de Kleer, eds., *Readings in Qualitative Reasoning about Physical Systems* (Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1989) 373-381.

